Informator o egzaminie maturalnym

od 2010 roku

matematyka

Warszawa 2008

Opracowano w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi

SPIS TREŚCI

I. Wstęp 5
II. Podstawy prawne egzaminu 7
III. Matura w pytaniach uczniów 9
IV. Struktura i forma egzaminu 11
V. Wymagania egzaminacyjne 13
VI. Szczegółowy opis standardów egzaminacyjnych 19
VII. Przykładowe arkusze i schematy oceniania 33
VIII. Zbiór przykładowych zadań maturalnych 75

I. WSTĘP

Oddajemy do rąk Państwa **Informator** o egzaminie maturalnym z matematyki w nadziei, że pomoże w przygotowaniu się do egzaminu maturalnego w roku 2010 i następnych sesjach egzaminacyjnych. Znajdą w nim Państwo tekst **Standardów wymagań egzaminacyjnych**, opis wymagań egzaminacyjnych wraz z przykładowymi zadaniami egzaminacyjnymi.

W maju 2010 r. matematykę jako przedmiot obowiązkowy będą zdawać wszyscy przystępujący do matury.

O zasadach tego egzaminu informowaliśmy już w zeszłym roku, a w tym uzupełniamy informację o przykładowe arkusze egzaminacyjne dla poziomu podstawowego, który będzie obowiązywał wszystkich maturzystów. Publikujemy również zestaw przykładowych zadań, który pomoże w przygotowaniach do egzaminu maturalnego w 2010 roku.

Chcemy przekazać Państwu rzetelną informację, licząc na wszelkie uwagi i komentarze, które być może wskażą na konieczność pewnych usprawnień w przeprowadzaniu tego egzaminu.

Sugerujemy zatem uważne zapoznanie się z **Informatorem**. Jest to ważne zarówno dla Państwa, jak i dla nas. Państwo dowiedzą się, jak będzie wyglądał egzamin, natomiast ewentualne uwagi i komentarze będą przydatne do poprawy jakości i rzetelności egzaminu oraz sposobów informowania o nim.

Państwa sukces podczas egzaminu, to również nasza satysfakcja. Życzymy zatem sukcesu!

Dyrektor Centralnej Komisji Egzaminacyjnej

II. PODSTAWY PRAWNE EGZAMINU

Podstawowym aktem prawnym wprowadzającym zewnętrzny system oceniania jest ustawa o systemie oświaty z 1991 roku wraz z późniejszymi zmianami (DzU z 2004 r. nr 256, poz. 2572 z późniejszymi zmianami).

Aktami prawnymi regulującymi przeprowadzanie egzaminów maturalnych są:

1. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 września 2008 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (DzU z 2008 r., Nr 178, poz. 1097).

2. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 28 sierpnia 2007 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów(DzU z 2007 r., Nr 157, poz. 1102).

3. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 19 października 1999 r. w sprawie wymagań, jakim powinni odpowiadać egzaminatorzy okręgowych komisji egzaminacyjnych oraz warunków wpisywania i skreślania egzaminatorów z ewidencji egzaminatorów (DzU z 1999 r. Nr 93, poz.1071).

III. MATURA W PYTANIACH UCZNIÓW

1. Dlaczego zostały zmienione standardy wymagań egzaminacyjnych?	Uległa zmianie podstawa programowa z matematyki, zaś standardy wymagań egzaminacyjnych muszą być zgodne z obowiązującą podstawą.
2. Jaka jest struktura nowych standardów wymagań?	Nowe standardy wymagań egzaminacyjnych mają dwie części. Pierwsza część opisuje pięć podstawowych obszarów umiejętności matematycznych. Druga część podaje listę szczegółowych umiejętności, których opanowanie będzie sprawdzane na egzaminie maturalnym. Lista ta ściśle odpowiada hasłom z podstawy programowej.
3. Dlaczego wybrano taką strukturę standardów?	W analizach porównawczych systemów edukacyjnych w ramach Unii Europejskiej matematyka stanowi obecnie bardzo ważny element jako podstawowy czynnik warunkujący postęp naukowo-techniczny Europy. Nowe ujęcie standardów wydobywa na plan pierwszy podstawowe cele kształcenia uczniów w zakresie matematyki: umiejętność modelowania, myślenia strategicznego i rozumowania. Matematyki uczymy po to, by uczeń nauczył się rozumować, planować strategię itp., a nie wyłącznie po to, by umiał rozwiązać równanie kwadratowe lub nierówność. Taki sposób formułowania wymagań jest obecnie powszechnie przyjęty w świecie, zarówno przez systemy egzaminacyjne, jak i przez międzynarodowe badania porównawcze, np. badania OECD PISA.
4. Jaki efekt przyniesie ta zmiana dla zdających egzamin maturalny?	W warstwie praktycznej – nic się nie zmieni. Zdający nadal będzie musiał po prostu jak najlepiej rozwiązać pewną liczbę zadań. Zadania te w większości nie będą odbiegać od tych, jakie znamy z dotychczasowych sesji egzaminu maturalnego. Klasyfikacja tych zadań w ramach schematu ogólnych umiejętności nie ma znaczenia dla samego procesu zdawania egzaminu. Jednakże uczeń, który chce sobie zapewnić dobry wynik, gwarantujący przyjęcie na renomowaną uczelnię, powinien liczyć się z tym, że sama znajomość podstawowych algorytmów nie gwarantuje sukcesu – powinien poświęcić także pewną ilość czasu na zadania, w których będzie ćwiczył umiejętność rozumowania.
5. Jak sprawdzane są prace i ogłaszane wyniki matury?	1. Poszczególne arkusze egzaminacyjne z każdego przedmiotu są sprawdzane i oceniane przez egzaminatorów zewnętrznych, przeszkolonych przez okręgowe komisje egzaminacyjne i wpisanych do ewidencji egzaminatorów. Każdy oceniony arkusz jest weryfikowany przez egzaminatora zwanego weryfikatorem. 2. Wynik egzaminu jest wyrażony w procentach. 3. Wynik egzaminu z dodatkowego przedmiotu nie ma wpływu na zdanie egzaminu, ale odnotowuje się go na świadectwie dojrzałości. 4. Komisja okręgowa sporządza listę osób, zawierającą uzyskane przez te osoby wyniki, i przesyła ją do szkoły wraz ze świadectwami dojrzałości.

6. Kiedy egzamin maturalny uznawany jest za zdany?	Egzamin jest **zdany**, jeżeli zdający z każdego z trzech obowiązkowych przedmiotów (w przypadku języków zarówno w części ustnej, jak i pisemnej), uzyskał minimum 30% punktów możliwych do uzyskania za dany egzamin na zadeklarowanym poziomie. Zdający otrzymuje świadectwo dojrzałości i jego odpis wydane przez komisję okręgową.
7. Kiedy egzamin maturalny uznawany jest za niezdany?	Egzamin uważa się za **niezdany** jeżeli: a) zdający z któregokolwiek egzaminu obowiązkowego, w części ustnej lub pisemnej, otrzymał mniej niż 30% punktów możliwych do uzyskania na zadeklarowanym poziomie, b) w trakcie egzaminu stwierdzono, że zdający pracuje niesamodzielnie i jego egzamin został przerwany i unieważniony, c) w trakcie sprawdzania prac egzaminator stwierdził niesamodzielność rozwiązywania zadań egzaminacyjnych i unieważniono egzamin.
8. Czy prace maturalne po sprawdzeniu będą do wglądu dla zdającego?	Na wniosek zdającego komisja okręgowa udostępnia **zdającemu** do wglądu sprawdzone arkusze, w miejscu i czasie określonym przez dyrektora OKE.
9. Czy matura zapewni dostanie się na wybrany kierunek studiów?	Matura nie daje gwarancji automatycznego dostania się na studia. Warunki rekrutacji na daną uczelnię ustala senat tej uczelni. Ustawa o szkolnictwie wyższym zastrzega, że uczelnie nie będą organizować egzaminów wstępnych dublujących maturę. To znaczy, jeżeli kandydat na studia zdał na maturze egzamin z wymaganego na dany wydział przedmiotu, to jego wynik z egzaminu maturalnego będzie brany pod uwagę w postępowaniu kwalifikacyjnym.

IV. STRUKTURA I FORMA EGZAMINU

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem pisemnym sprawdzającym wiadomości i umiejętności określone w *Standardach wymagań egzaminacyjnych* i polega na rozwiązaniu zadań zawartych w arkuszach egzaminacyjnych.

1. Egzamin maturalny z matematyki zdawanej jako **przedmiot obowiązkowy** jest zdawany na **poziomie podstawowym**. Egzamin trwa 170 minut i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych sprawdzających rozumienie pojęć i umiejętność ich zastosowania w życiu codziennym oraz zadań o charakterze problemowym. Zadania egzaminacyjne obejmują zakres wymagań dla poziomu podstawowego.
2. Egzamin maturalny z matematyki zdawanej jako **przedmiot dodatkowy** jest zdawany na **poziomie rozszerzonym.** Egzamin trwa 180 minut i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych wymagających rozwiązywania problemów matematycznych. Zadania egzaminacyjne obejmują zakres wymagań dla poziomu rozszerzonego. Konstrukcja arkusza nie zmienia się w stosunku do lat ubiegłych.

Opis arkusza dla poziomu podstawowego
Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań:
1. grupa – zawiera od 20 do 30 zadań zamkniętych. Do każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0 - 1. Zdający udziela odpowiedzi, zaznaczając je na karcie odpowiedzi.
2. grupa – zawiera od 5 do 10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi punktowanych w skali 0-2.
3. grupa – zawiera od 3 do 5 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi punktowanych w skali 0-4, albo 0-5, albo 0-6.

Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający może uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych
1. Zadania otwarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzają i oceniają egzaminatorzy powołani przez dyrektora okręgowej komisji egzaminacyjnej.
2. Rozwiązania poszczególnych zadań oceniane są na podstawie szczegółowych kryteriów oceniania, jednolitych w całym kraju.
3. Egzaminatorzy w szczególności zwracają uwagę na:
   - poprawność merytoryczną rozwiązań,
   - kompletność prezentacji rozwiązań zadań – wykonanie cząstkowych obliczeń i przedstawienie sposobu rozumowania.
4. Ocenianiu podlegają tylko te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia. Komentarze, nawet poprawne, nie mające związku z poleceniem nie podlegają ocenianiu.
5. Gdy do jednego polecenia zdający podaje kilka rozwiązań (jedno prawidłowe, inne błędne), to egzaminator nie przyznaje punktów.
6. Za całkowicie poprawne rozwiązania zadań, uwzględniające inny tok rozumowania niż podany w schemacie punktowania, przyznaje się maksymalną liczbę punktów.
7. Zapisy w brudnopisie nie są oceniane.
8. Zdający zdał egzamin maturalny z matematyki, jeżeli otrzymał co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań z arkusza dla poziomu podstawowego.
9. Wynik egzaminu maturalnego z matematyki ustalony przez komisję okręgową jest ostateczny.

V. WYMAGANIA EGZAMINACYJNE

Standardy wymagań egzaminacyjnych

Zdający posiada umiejętności w zakresie:

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
1. wykorzystania i tworzenia informacji:	
interpretuje tekst matematyczny i formułuje uzyskane wyniki	używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników
2. wykorzystania i interpretowania reprezentacji:	
używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych	rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi
3. modelowania matematycznego:	
dobiera model matematyczny do prostej sytuacji	buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia
4. użycia i tworzenia strategii:	
stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania	tworzy strategię rozwiązania problemu
5. rozumowania i argumentacji:	
prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Zdający demonstruje poziom opanowania powyższych umiejętności, rozwiązując zadania, w których:

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
1) liczby rzeczywiste a) planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych, b) bada, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną, c) wyznacza rozwinięcia dziesiętne; znajduje przybliżenia liczb; wykorzystuje pojęcie błędu przybliżenia, d) stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach, e) posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej,	jak na poziomie podstawowym oraz: a) stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze; wyznacza największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych, b) stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,

f) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\|x - a\| = b$, $\|x - a\| > b$, $\|x - a\| < b$, g) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych, h) zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym,	
2) wyrażenia algebraiczne: a) posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$, b) rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, c) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany, d) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych za pomocą przekształceń opisanych w punkcie b), e) oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej, f) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; skraca i rozszerza wyrażenia wymierne,	jak na poziomie podstawowym oraz: a) posługuje się wzorem $(a - 1)(1 + a + ... + a^{n-1}) = a^n - 1$, b) wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x-a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$, c) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych,
3) równania i nierówności: a) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów, b) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych, c) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych, d) rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki, e) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$;	jak na poziomie podstawowym oraz: a) stosuje wzory Viète'a, b) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski, c) rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe, d) rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne, np. $\frac{x+1}{x+3} > 2$; $\frac{x+1}{x} < 3$, e) rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, typu:

$\frac{x+1}{x} = 2x$, f) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do prostych równań wymiernych,	$\|\|x+1\|+2\| > 3$ i $\|x+1\| + \|x+2\| < 3$,
4) funkcje: a) określa funkcję za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego, b) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak, c) sporządza wykres funkcji spełniającej podane warunki, d) potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, e) sporządza wykresy funkcji liniowych, f) wyznacza wzór funkcji liniowej, g) wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej, h) sporządza wykresy funkcji kwadratowych, i) wyznacza wzór funkcji kwadratowej, j) wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej, k) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym, l) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do badania funkcji kwadratowej, m) sporządza wykres, odczytuje własności i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym związane z proporcjonalnością odwrotną, n) sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym,	jak na poziomie podstawowym oraz: mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ potrafi naszkicować: a) wykres funkcji $y = \|f(x)\|$, b) wykresy funkcji $y = c \cdot f(x)$, $y = f(c \cdot x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, c) wykres będący efektem wykonania kilku operacji, na przykład $y = \|f(x+2)-3\|$, d) wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw, e) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym) z wykorzystaniem takich funkcji,

5) ciągi liczbowe: a) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym, b) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, c) stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym,	jak na poziomie podstawowym oraz wyznacza wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,
6) trygonometria: a) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych, b) rozwiązuje równania typu $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x = a$, dla $0^o < x < 90^o$, c) stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego, d) znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego,	jak na poziomie podstawowym oraz: a) stosuje miarę łukową i miarę stopniową kąta, b) wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego, c) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności typu $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, d) stosuje związki: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów w dowodach tożsamości trygonometrycznych, e) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne, na przykład $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$
7) planimetria: a) korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu, b) wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym, c) znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym, d) określa wzajemne położenie prostej i okręgu,	jak na poziomie podstawowym oraz: a) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu, b) stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych, c) stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym, d) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,

8) geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej: a) wykorzystuje pojęcie układu współrzędnych na płaszczyźnie, b) podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym, c) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych, d) interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, e) oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej, f) wyznacza współrzędne środka odcinka, g) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,	jak na poziomie podstawowym oraz: a) interpretuje geometrycznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi i układy takich nierówności, b) rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej, c) oblicza odległość punktu od prostej, d) opisuje koła za pomocą nierówności, e) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę, f) interpretuje geometrycznie działania na wektorach, g) stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur, h) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji,
9) stereometria: a) wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości, b) wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii,	jak na poziomie podstawowym oraz a) wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną, b) stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,
10) elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka: a) oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych, b) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia, c) wykorzystuje sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń, d) wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.	jak na poziomie podstawowym oraz wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

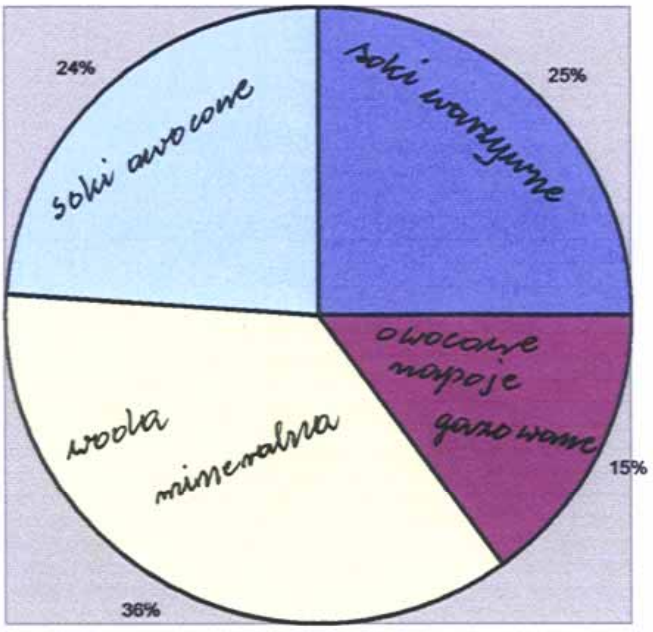
VI. SZCZEGÓŁOWY OPIS STANDARDÓW WYMAGAŃ EGZAMINACYJNYCH

Zdający posiada umiejętności w zakresie:

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
1) wykorzystania i tworzenia informacji:	
interpretuje tekst matematyczny i formułuje uzyskane wyniki	używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników
Zdający potrafi: • odczytać informację bezpośrednio wynikającą z treści zadania • zastosować podany wzór lub podany przepis postępowania • wykonać rutynową procedurę dla typowych danych • przejrzyście zapisać przebieg i wynik obliczeń oraz uzyskaną odpowiedź	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym oraz: • wykonać rutynową procedurę na niekoniecznie typowych danych • odczytać informację z wykorzystaniem więcej niż jednej postaci danych • precyzyjnie przedstawić przebieg swojego rozumowania

Przykładowe zadania (poziom podstawowy):

1. Diagram przedstawia wyniki ankiety, w której ankietowani odpowiedzieli na pytanie, jakie napoje piją między posiłkami. Ankietowani wybierali tylko jeden z czterech rodzajów napojów.



Na podstawie informacji przedstawionych na diagramie oblicz:

- ile procent badanych osób pije soki owocowe lub wodę mineralną,
- ile procent badanych osób nie pije owocowych napojów gazowanych,
- ile procent badanych osób nie pije soków warzywnych i nie pije wody mineralnej.

2. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \frac{2-n}{n^2}$ dla $n = 1,2,3...$. Oblicz a_2, a_4 i a_5.

3. Przedstaw $\frac{4^{-1} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

4. Podaj miejsca zerowe funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych *x*:

$f(x) = x(x+2)$, $g(x) = (x-5)(x+2)$, $h(x) = (5-2x)(2x+1)$.

5. Oblicz $a-b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

6. Wskaż równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-1,2)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$:

a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$,

b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{2}$,

c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$,

d) $(x+1)^2 - (y-2)^2 = \sqrt{2}$.

Przykładowe zadania (poziom rozszerzony):

7. Oblicz $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$.

8. Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta. Odpowiedź podaj w stopniach.

9. Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań.

10. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{dla} \quad x < -5 \\ -x+2 & \text{dla} \quad -5 \le x < 5 \\ x-6 & \text{dla} \quad x \ge 5 \end{cases}$. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby

a) –5, 2, 6.

b) 2, 6.

c) –5, 2.

d) –5, –2, 6.

2) wykorzystania i interpretowania reprezentacji:	
używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych	rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi
Zdający potrafi: • poprawnie wykonywać działania na liczbach i przedziałach liczbowych, przekształcać wyrażenia algebraiczne, rozwiązywać niezbyt złożone równania, ich układy oraz nierówności, odczytywać z wykresu własności funkcji, sporządzać wykresy niektórych funkcji, znajdować stosunki miarowe w figurach płaskich i przestrzennych (także z wykorzystaniem układu współrzędnych lub trygonometrii), zliczać obiekty i wyznaczać prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach kombinatorycznych • zastosować dobrze znaną definicję lub twierdzenie w typowym kontekście	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także: • w odniesieniu do bardziej złożonych obiektów matematycznych, a ponadto potrafi podać przykład obiektu matematycznego spełniającego zadane warunki

Przykładowe zadania (poziom podstawowy):

1. Na osi liczbowej zaznaczono przedział A złożony z tych liczb rzeczywistych, których odległość od punktu 1 jest niewiększa od 4,5. Przedział A przesunięto wzdłuż osi o 2 jednostki w kierunku dodatnim, otrzymując przedział B. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, które należą jednocześnie do A i do B.

2. Rozwiąż równanie $x + x^3 = 1 + x^2$.

3. Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2x^2 - 4x + 11$ w przedziale $A = \langle 0, 4 \rangle$.

4. Pan Kowalski planując wyjazd na wakacje letnie w następnym roku postanowił założyć lokatę, wpłacając do banku 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat:

- lokata A – oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku,
- lokata B – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,8%, kapitalizacja odsetek co pół roku,
- lokata C – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,6%, kapitalizacja odsetek co kwartał.

Oceń, wykonując odpowiednie obliczenia, która lokata jest najkorzystniejsza dla Pana Kowalskiego.

5. W trójkącie równoramiennym *ABC*, w którym $|AC| = |BC| = 10\,\text{cm}$, wysokość poprowadzona z wierzchołka *C* jest równa 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Odpowiedź podaj w stopniach.

6. Ostrokątny trójkąt równoramienny *ABC* o podstawie *AB* jest wpisany w okrąg o środku *S*, przy czym kąt *SAB* ma miarę 40°. Oblicz miarę kąta *CAB*.

7. Oblicz odległość punktu *A* od środka odcinka *BC*, gdzie $A = (1,3)$, $B = (4,7)$, $C = (-2,-3)$.

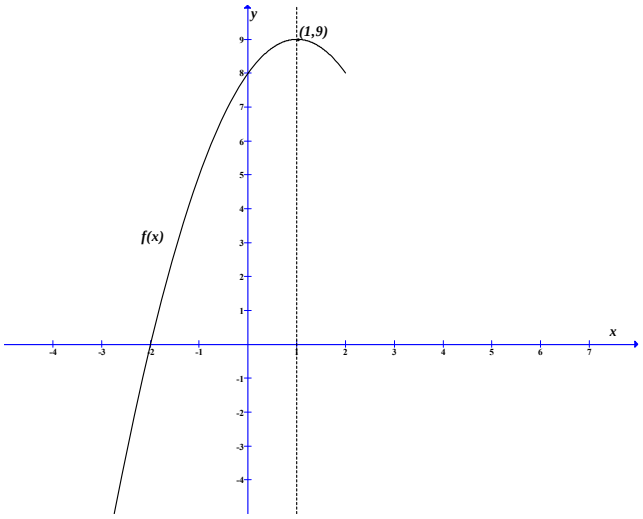
8. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości *m* jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiadomo, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

9. O zdarzeniach losowych *A* i *B* wiemy że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$,

b) $P(A \setminus B)$.

10. Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.



a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: –2 oraz 4.

b) Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2,4)$.

c) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$.

d) Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty,9)$.

Przykładowe zadania (poziom rozszerzony):

11. W kolejce do kasy biletowej ustawiły się cztery dziewczynki i pięciu chłopców. Liczba wszystkich możliwych ustawień osób w tej kolejce wynosi

a) $4! + 5!$.

b) $9!$.

c) $4 \cdot 5$.

d) $4! \cdot 5!$.

12. Rozwiąż równanie $\log_5\left(\log_4\left(\log_2 x\right)\right) = 0$.

13. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1$. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(2-x)$.

14. Narysuj wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ wzorem

a) $f(x) = 2^x - 1$, b) $f(x) = 2^{x-1}$.

15. Pole wycinka koła o promieniu $3\,\text{cm}$ jest równe $2\,\text{cm}^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

16. Punkty $A = (1, 1),\ B = (5, 5),\ C = (3, 5)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$ niebędącego równoległobokiem, w którym $AB \| CD$.

a) Wyznacz równanie osi symetrii tego trapezu.

b) Oblicz pole tego trapezu.

17. Na okręgu zaznaczono sześć różnych punktów. Ile różnych wielokątów wypukłych o wszystkich wierzchołkach w tych punktach można narysować?

18. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $x^{17} - mx^{15} + (m-2)x^{10} + 2x + m^2 - 2$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 3?

19. Wyznacz równanie okręgu o środku $A = (2, 3)$, stycznego do prostej o równaniu $x - 2y + 1 = 0$.

3) modelowania matematycznego:	
dobiera model matematyczny do prostej sytuacji	buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia
Zdający potrafi, także w sytuacjach praktycznych: • podać wyrażenie algebraiczne, funkcję, równanie, nierówność, interpretację geometryczną, przestrzeń zdarzeń elementarnych opisujące przedstawioną sytuację • przetworzyć informacje wyrażone w jednej postaci w postać ułatwiającą rozwiązanie problemu • ocenić przydatność otrzymanych wyników z perspektywy sytuacji, dla której zbudowano model	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także: • buduje model matematyczny danej sytuacji, także praktycznej, również wymagający uwzględnienia niezbędnych ograniczeń i zastrzeżeń

Przykładowe zadania (poziom podstawowy):

1. Dany jest prostokąt o bokach *a* i *b*. Zmniejszamy długość boku *a* o 10% oraz zwiększamy długość boku *b* o 20%.

a) O ile procent zwiększy się pole tego prostokąta?

b) Wyznacz długość boku *b*, dla której nowy prostokąt będzie miał taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy, jeśli wiadomo, że bok *a* ma długość 30 cm.

2. Liczbę 42 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.

3. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y=\frac{1}{2}x^2-bx+2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których wierzchołek paraboli leży nad osią *Ox*.

4. Punkt $B=(-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi *Ox* w punkcie $A=(2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

5. Strzelając do tarczy pewien strzelec uzyskuje co najmniej 9 punktów z prawdopodobieństwem $0,5$, a co najwyżej 9 punktów z prawdopodobieństwem 0,7. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten strzelec uzyska dokładnie 9 punktów.

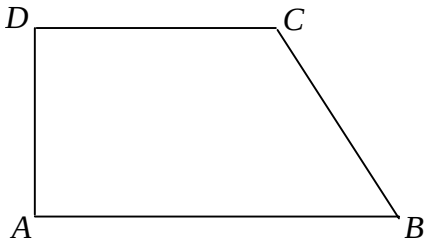
6. Długość ramienia *BC* trapezu prostokątnego jest dwa razy większa od różnicy długości jego podstaw. Kąt *ABC* ma miarę

a) 30°.

b) 45°.

c) 60°.

d) 75°.



Przykładowe zadania (poziom rozszerzony):

7. Niech *A* będzie zbiorem wszystkich liczb *x*, które spełniają równość $|x-1|+|x-3|=2$. Niech *B* będzie zbiorem wszystkich punktów na osi liczbowej, których suma odległości od punktów 4 i 6 jest niewiększa niż 4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory *A* i *B* oraz wszystkie punkty, które należą jednocześnie do *A* i do *B*.

8. Przedział $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x. Oblicz m.

9. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach *Ox* i *Oy* układu współrzędnych. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. Narysuj tę krzywą.

10. Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest 150°, a czwartym 270°. Oblicz sumę sinusów tych pięciu kątów.

11. Dane jest równanie $x^2+(3m-2)x=-m-2$ z niewiadomą x. Sformułuj warunki, jakie powinien spełniać parametr *m*, by to równanie miało dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest dodatnia.

12. Wyznacz pierwsze trzy wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że są one dodatnie, ich suma jest równa 21 oraz suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$.

13. Z szuflady, w której znajduje się 10 różnych par rękawiczek wybieramy losowo cztery rękawiczki. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A – wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary,

B – wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie jedna para.

4) użycia i tworzenia strategii:	
stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania	tworzy strategię rozwiązywania problemu
Zdający potrafi: • dobrać odpowiedni algorytm do wskazanej sytuacji problemowej • ustalić zależności między podanymi informacjami • zaplanować kolejność wykonywania czynności, wprost wynikających z treści zadania, lecz nie mieszczących się w ramach rutynowego algorytmu • krytycznie ocenić otrzymane wyniki	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także: • zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzący do rozwiązania problemu, nie wynikający wprost z treści zadania

Przykładowe zadania (poziom podstawowy):

1. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich *a* i *b*, spełniających nierówność $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{6}{7}$.

2. Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż na czynniki wyrażenie $1 - a^2 + 2ab - b^2$.

3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4, a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości *n*, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

4. Liczby dodatnie *a*, *b*, *c* spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$. Oblicz $\sqrt{abc}$.

5. Ile punktów wspólnych ma okrąg o równaniu $x^2 + (y-3)^2 = 6$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$?

6. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej *g* jest przedział $(-\infty, 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2, 8)$. Wyznacz wzór funkcji *g*.

7. Rozwiąż równanie $(2x+1)+(2x+4)+(2x+7)+...+(2x+28)=155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

8. Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$.

9. Dany jest trójkąt prostokątny *ABC* o przeciwprostokątnej *AB*, taki że $\sin \sphericalangle BAC = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

10. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A = (2,0)$ i $B = (4,0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu *C*, dla których *ABC* jest trójkątem równoramiennym o podstawie *AB* i polu równym 3.

11. Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

Przykładowe zadania (poziom rozszerzony):

12. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $|x-2|+|x+3|=p$ ma dokładnie dwa rozwiązania.

13. Wykaż, że dla $a \in (2,3)$ zachodzi równość $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a}+\frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2}=2$.

14. Dane jest równanie $x^2+bx+c=0$ z niewiadomą x. Wyznacz wartości b oraz c tak, by były one rozwiązaniami danego równania.

15. Dane są funkcje liniowe g i h określone wzorami: $g(x)=ax+b$ i $h(x)=bx+a$. Wiadomo, że funkcja g jest rosnąca, a funkcja h malejąca.

a) Wyznacz pierwszą współrzędną punktu przecięcia wykresów tych funkcji.

b) Oblicz liczby a i b wiedząc, że wykresy funkcji g i h są prostymi prostopadłymi, a punkt ich przecięcia leży na osi Ox.

16. Dany jest ciąg (a_n) mający tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}(7n^2-n)$. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

17. Proste zawierające ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Dane są: $|AB|=6$, $|CD|=2$ oraz obwód trójkąta SCD równy $\sqrt{18}$. Oblicz obwód trójkąta SAB.

18. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ+\alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t. Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.

19. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Dane są $|BC|=a$, $|CD|=b$, $|\sphericalangle DAB|=\alpha$. Wyznacz długość przekątnej BD.

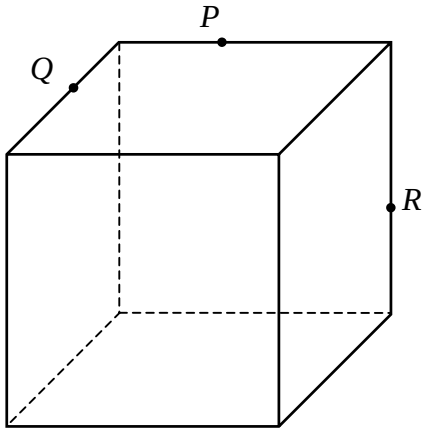
20. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS. Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM.

21. Ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 2n+5\}$ wybieramy jednocześnie dwie liczby. Na ile sposobów możemy to zrobić, tak aby otrzymać dwie liczby takie, że:

a) ich różnica będzie liczbą parzystą,

b) suma ich kwadratów będzie liczbą podzielną przez cztery?

22. Narysuj przekrój równoległościanu płaszczyzną *PQR*.



23. Wiedząc, że dla pewnego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich prawdziwa jest równość $S_{14} = 5 \cdot S_7$, oblicz iloraz tego ciągu. Symbol S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

5) rozumowania i argumentacji:	
prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.
Zdający potrafi: • wyprowadzić wniosek z prostego układu przesłanek i go uzasadnić • zastosować twierdzenie, które nie występuje w treści zadania	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także: • wyprowadzić wniosek ze złożonego układu przesłanek i go uzasadnić • analizować i interpretować otrzymane wyniki • przeprowadzić dowód

Przykładowe zadania (poziom podstawowy):

1. Wiadomo, że 1,5849 jest przybliżeniem liczby $10^{0,2}$ z zaokrągleniem do 4 miejsc po przecinku. Wyznacz przybliżenie liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ z zaokrągleniem do 3 miejsc po przecinku oraz przybliżenie liczby $10^{\frac{11}{5}}$ z zaokrągleniem do 1 miejsca po przecinku.

2. Wykaż, że dla $m=3$ nierówność $x^2+(2m-3)x+2m+5>0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste *x*.

3. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej *f* jest liczba 5, maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca to $\langle 2,+\infty)$. Największa wartość funkcji *f* w przedziale $\langle -8,-7\rangle$ jest równa (-24). Wyznacz wzór funkcji *f* i narysuj jej wykres.

4. W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.

5. Dany jest trapez *ABCD* o podstawach *AB* i *CD*. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie *S*. Wykaż, że $|SA|\cdot|SD|=|SB|\cdot|SC|$.

6. Prostokąt *ABCD* obracając się wokół boku *AB*, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku *AD*, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt *ABCD* jest kwadratem.

Przykładowe zadania (poziom rozszerzony):

7. Wielomian f jest określony wzorem $f(x)=ax^4-9x^3+3x^2+7x+b$ dla pewnych liczb pierwszych a oraz b. Wiadomo, że liczba $\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Oblicz a i b.

8. Dane jest równanie $x^2+mx+m-1=0$ z niewiadomą x. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

9. Funkcja g jest określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych w następujący sposób: jeśli $x\in\langle k,k+1)$ dla pewnej liczby całkowitej k, to $g(x)=kx-k-1$.

a) Narysuj wykres funkcji g w przedziale $\langle -2,0)$.

b) Uzasadnij, że funkcja g nie ma miejsc zerowych.

c) Rozwiąż równanie $g(x)=2010$.

10. Wykaż, że jeżeli liczby b, c, $2b-a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to liczby ab, b^2, c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

11. Wykaż, że wyrażenie $\frac{-\cos 2x}{\sin x\cos x}=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ nie jest tożsamością.

12. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

13. Dane są punkty $A=(2,3)$, $B=(5,4)$. Na prostej o równaniu $y=5$ wyznacz punkt C tak, aby łamana ACB miała jak najmniejszą długość. Odpowiedź uzasadnij.

14. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem boku AB i $|AM|=|MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

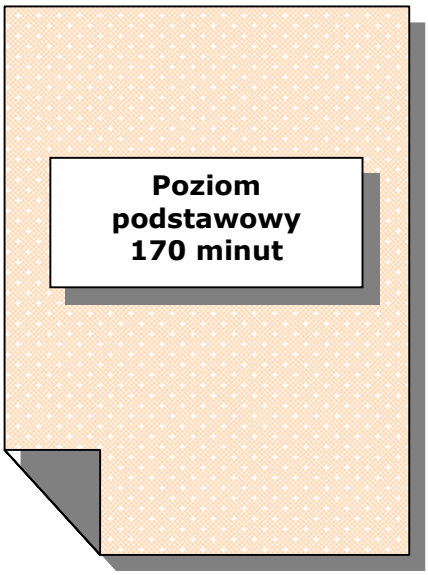
15. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB|=1$, $|BC|=\sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

16. Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
liczba osób	11	14
średnia ocen	4,0	3,8
odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe **dla całej klasy**. Wyniki podaj z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku.

VII. PRZYKŁADOWE ARKUSZE I SCHEMATY OCENIANIA



PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY Z MATEMATYKI

Zestaw P1

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy 170 minut

Instrukcja dla piszącego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 16 stron.
2. W zadaniach od 1. do 25. są podane 4 odpowiedzi: A, B, C, D, z których tylko jedna jest prawdziwa. Wybierz tylko **jedną** odpowiedź i zaznacz ją na karcie odpowiedzi.
3. Zaznaczając odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego, zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◉ i zaznacz właściwe.
4. Rozwiązania zadań od 26. do 33. zapisz starannie i czytelnie w wyznaczonych miejscach. Przedstaw swój tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
6. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
8. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
10. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie
50 punktów

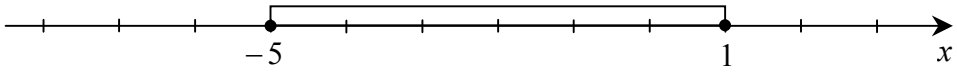
ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. *(1 pkt)*
Punkty $A=(1,-2)$, $C=(4,2)$ są dwoma wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Wysokość tego trójkąta jest równa

A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

Zadanie 2. *(1 pkt)*
Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



A. $|x+2|\le 3$ **B.** $|x-2|\le 3$ **C.** $|x-3|\le 2$ **D.** $|x+3|\le 2$

Zadanie 3. *(1 pkt)*
Drut o długości 27 m pocięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 2:3:4. Jaką długość ma najkrótsza z tych części?

A. 4,5 m **B.** 6 m **C.** 6,75 m **D.** 9 m

Zadanie 4. *(1 pkt)*
Ile punktów wspólnych ma prosta o równaniu $y=-x+2$ z okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

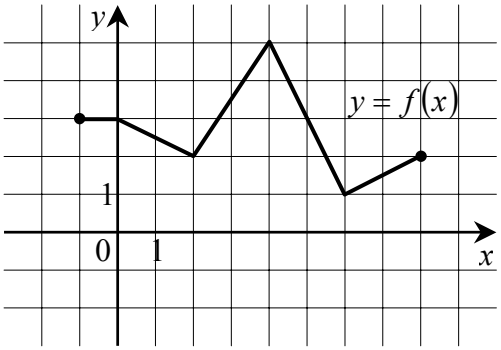
Zadanie 5. *(1 pkt)*
Liczby: $1, 3, x-11$, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Liczba x jest równa

A. 5 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 20

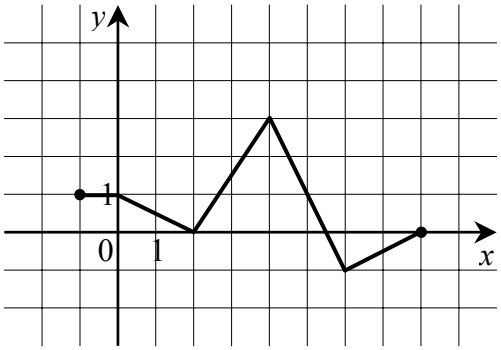
BRUDNOPIS

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Na rysunku 1. jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Rys. 1.



Rys. 2.

Funkcja przedstawiona na rysunku 2. jest określona wzorem

A. $y = f(x) + 2$ **B.** $y = f(x) - 2$ **C.** $y = f(x - 2)$ **D.** $y = f(x + 2)$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Wtedy $\sin\alpha$ jest równy

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\frac{7}{16}$ **D.** $\frac{\sqrt{7}}{16}$

Zadanie 8. *(1 pkt)*

Wskaż funkcję kwadratową, której zbiorem wartości jest przedział $\langle -2, \infty)$.

A. $y = -2x^2 + 2$ **B.** $y = -(x+1)^2 - 2$ **C.** $y = 2(x-1)^2 + 2$ **D.** $y = (x+1)^2 - 2$

Zadanie 9. *(1 pkt)*

Liczba $\log 36$ jest równa

A. $2\log 18$ **B.** $\log 40 - 2\log 2$ **C.** $2\log 4 - 3\log 2$ **D.** $2\log 6 - \log 1$

Zadanie 10. *(1 pkt)*

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste?

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

Zadanie 11. *(1 pkt)*

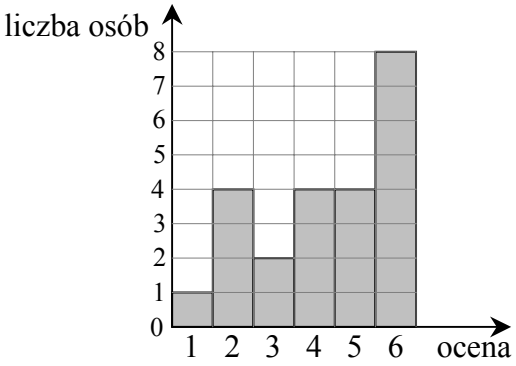
Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem o promieniu 12 cm. Podstawa tego stożka jest kołem o promieniu

A. 12 cm **B.** 6 cm **C.** 3 cm **D.** 1 cm

BRUDNOPIS

Zadanie 12. *(1 pkt)*

Wyniki sprawdzianu z matematyki są przedstawione na diagramie



Mediana ocen uzyskanych przez uczniów jest równa

A. 6 **B.** 5 **C.** 4,5 **D.** 4

Zadanie 13. *(1 pkt)*

Prosta *l* ma równanie $y = 2x - 11$. Wskaż równanie prostej równoległej do *l*.

A. $y = 2x$ **B.** $y = -2x$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x$ **D.** $y = \frac{1}{2}x$

Zadanie 14. *(1 pkt)*

Liczba rozwiązań równania $\frac{x+3}{(5-x)(x+2)} = 0$ jest równa

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Zadanie 15. *(1 pkt)*

Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{4} + \frac{1}{6} < \frac{x}{3}$.

A. $(-\infty, -2)$ **B.** $(-\infty, 2)$ **C.** $(-2, +\infty)$ **D.** $(2, +\infty)$

Zadanie 16. *(1 pkt)*

Przekątna prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 4 \times 5$ ma długość

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{15}$

Zadanie 17. *(1 pkt)*

Liczba $x = -7$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = (3-a)x + 7$ dla

A. $a = -7$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = -1$

Zadanie 18. *(1 pkt)*

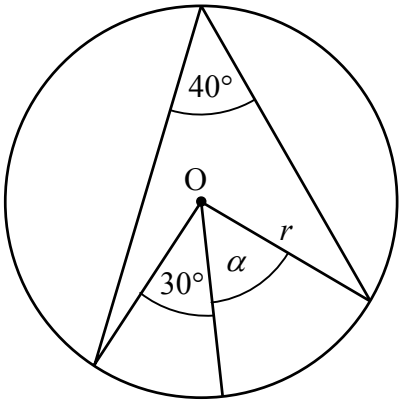
Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 9$ jest

A. $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ **B.** $\langle -3, 3\rangle$ **C.** $\langle -3, +\infty)$ **D.** $\langle 3, +\infty)$

BRUDNOPIS

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Zaznaczony na rysunku kąt α jest równy



A. $50°$ **B.** $40°$ **C.** $30°$ **D.** $10°$

Zadanie 20. *(1 pkt)*

Która z liczb jest rozwiązaniem równania $2(x-1)+x=x-3(2-3x)$?

A. $\frac{8}{11}$ **B.** $-\frac{4}{11}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** -1

Zadanie 21. *(1 pkt)*

Liczba $2^{40}\cdot 4^{20}$ jest równa

A. 4^{40} **B.** 4^{50} **C.** 8^{60} **D.** 8^{800}

Zadanie 22. *(1 pkt)*

Wskaż liczbę, której 4% jest równe 8.

A. 3,2 **B.** 32 **C.** 100 **D.** 200

Zadanie 23. *(1 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = 0,9$. Wówczas

A. $\alpha < 30^o$ **B.** $\alpha = 30^o$ **C.** $\alpha = 45^o$ **D.** $\alpha > 45^o$

Zadanie 24. *(1 pkt)*

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy (-2). Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 16 **B.** -16 **C.** 8 **D.** -8

Zadanie 25. *(1 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Liczba p jest prawdopodobieństwem wylosowania liczby podzielnej przez 3. Wtedy

A. $p < 0,3$ **B.** $p = 0,3$ **C.** $p = \frac{1}{3}$ **D.** $p > \frac{1}{3}$

BRUDNOPIS

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 26. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Oblicz a_2 i a_5.

Odpowiedź: $a_2 =$ ..... i $a_5 =$ ..... .

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 12x^2 + x - 12 = 0$.

Odpowiedź: …… .

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Punkt E leży na ramieniu BC trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Udowodnij, że $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle CDE|$.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a i b, spełniających nierówność $\frac{4}{9} < \frac{a}{b} < \frac{5}{9}$.

Odpowiedź: Liczby takie to np.: $a =$ ..... i $b =$ ..... .

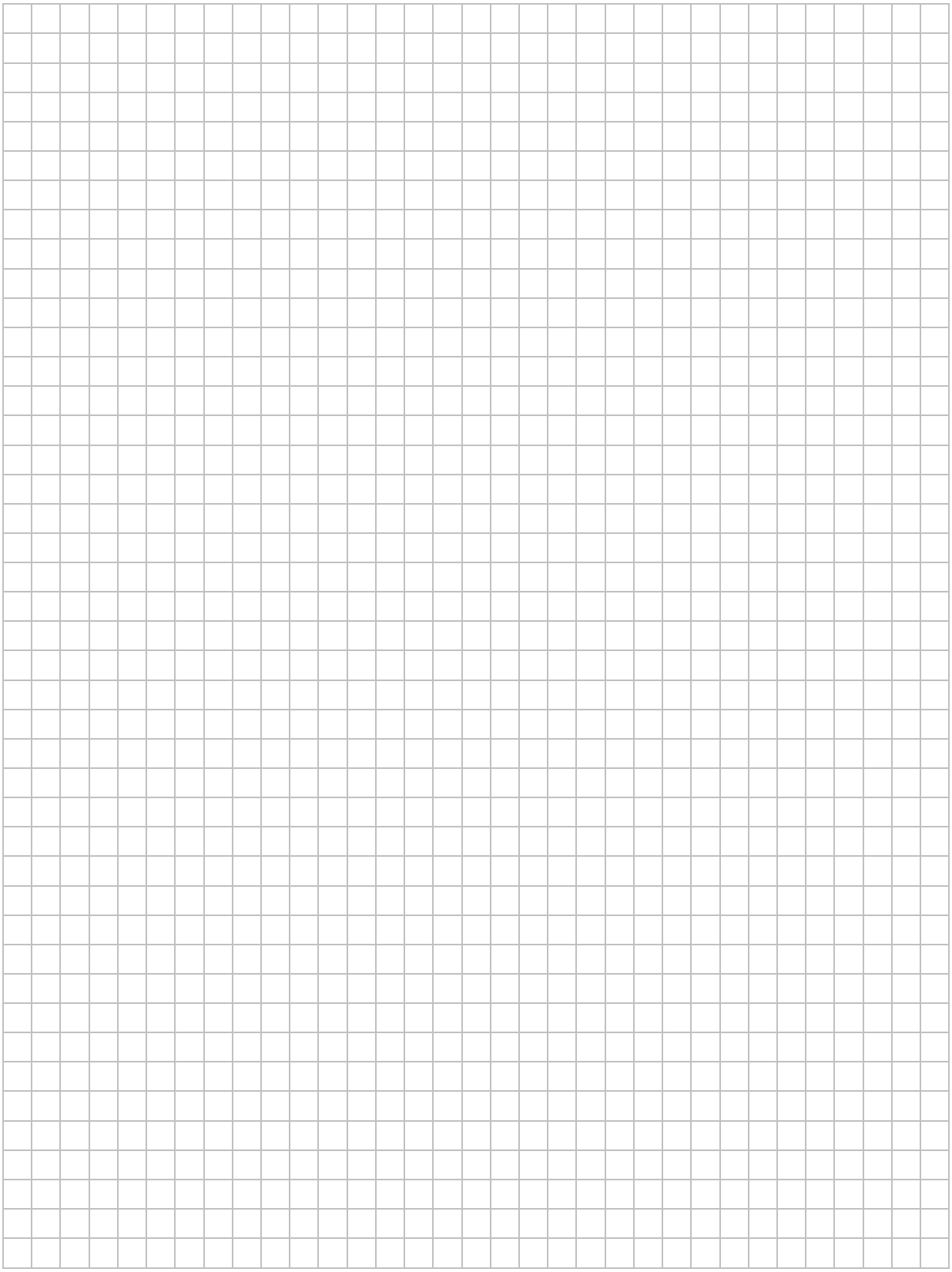
Zadanie 30. *(2 pkt)*

Dany jest prostokąt o bokach a i b oraz prostokąt o bokach c i d . Długość boku c to 90% długości boku a. Długość boku d to 120% długości boku b. Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach a i b stanowi pole prostokąta o bokach c i d .

Odpowiedź: Pole prostokąta o bokach c i d stanowi …..… % pola prostokąta o bokach a i b.

Zadanie 31. *(6 pkt)*

Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.



Zadanie 32. *(4 pkt)*

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe , 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

Zadanie 33. *(5 pkt)*

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $40°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

BRUDNOPIS

Karta odpowiedzi

Wypełnia piszący

Nr zadania	A	B	C	D
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☐
7.	☐	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☐	☐
9.	☐	☐	☐	☐
10.	☐	☐	☐	☐
11.	☐	☐	☐	☐
12.	☐	☐	☐	☐
13.	☐	☐	☐	☐
14.	☐	☐	☐	☐
15.	☐	☐	☐	☐
16.	☐	☐	☐	☐
17.	☐	☐	☐	☐
18.	☐	☐	☐	☐
19.	☐	☐	☐	☐
20.	☐	☐	☐	☐
21.	☐	☐	☐	☐
22.	☐	☐	☐	☐
23.	☐	☐	☐	☐
24.	☐	☐	☐	☐
25.	☐	☐	☐	☐

Wypełnia sprawdzający

Nr zadania	X	0	1	2
26.	☐	☐	☐	☐
27.	☐	☐	☐	☐
28.	☐	☐	☐	☐
29.	☐	☐	☐	☐
30.	☐	☐	☐	☐

Nr zadania	X	0	1	2	3	4	5	6
31.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
32.	☐	☐	☐	☐	☐	☐		
33.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	

Suma punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cyfra dziesiątek	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Cyfra jednostek	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

D	**J**

Zestaw P1

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	**A**	**A**	**B**	**C**	**C**	**B**	**B**	**D**	**D**	**B**	**B**	**B**	**A**	**C**	**D**	**C**	**B**	**A**	**A**	**C**	**A**	**D**	**A**	**A**	**A**

Odpowiedzi do zadań otwartych

Numer zadania	Odpowiedź
26	$a_2 = 0,\ \ a_5 = \frac{3}{25}$
27	$x = 12$
28	Dowód
29	np. $a = 1,\ \ b = 2$
30	108%
31	$45\,\text{km/h},\ 54\,\text{km/h}$
32	$\frac{19}{54}$
33	$V = \frac{1024}{3 \cdot \text{tg}^2 40^\circ} \approx 484,9$

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

Zestaw P2

Czas pracy 170 minut

Instrukcja dla piszącego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 17 stron.
2. W zadaniach od 1. do 20. są podane 4 odpowiedzi: A, B, C, D, z których tylko jedna jest prawdziwa. Wybierz tylko **jedną** odpowiedź i zaznacz ją na karcie odpowiedzi.
3. Zaznaczając odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego, zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◉ i zaznacz właściwe.
4. Rozwiązania zadań od 21. do 29. zapisz starannie i czytelnie w wyznaczonych miejscach. Przedstaw swój tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
6. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
8. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
10. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 20. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. *(1 pkt)*

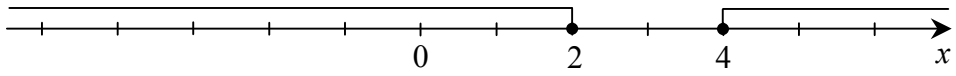
Liczba $2^{20} \cdot 4^{40}$ jest równa

A. 2^{60} **B.** 4^{50} **C.** 8^{60} **D.** 8^{800}

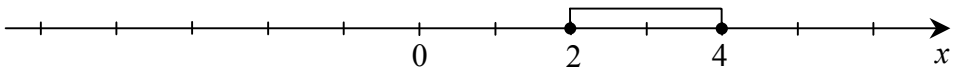
Zadanie 2. *(1 pkt)*

Zbiór rozwiązań nierówności $|x-3| \geq 1$ jest przedstawiony na rysunku

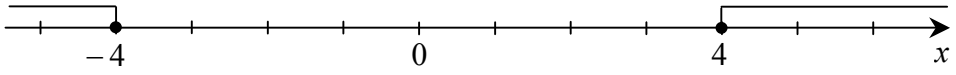
A.



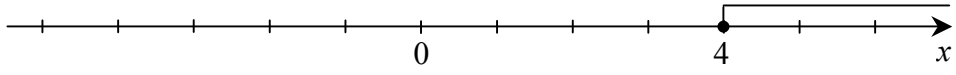
B.



C.



D.



Zadanie 3. *(1 pkt)*

O zdarzeniach losowych A, B wiadomo, że: $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}3$ i $P(A \cup B)=0{,}7$.
Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B spełnia warunek

A. $P(A \cap B)=0{,}2$ **B.** $P(A \cap B)>0{,}3$ **C.** $P(A \cap B)<0{,}2$ **D.** $P(A \cap B)=0{,}3$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Wskaż liczbę, której 6% jest równe 6.

A. 0,36 **B.** 3,6 **C.** 10 **D.** 100

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa $30°$.
Kąt rozwarty tego równoległoboku jest równy

A. 105° **B.** 115° **C.** 125° **D.** 135°

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} x-4 & \text{dla} \quad x \leq 3 \\ -x+2 & \text{dla} \quad x>3 \end{cases}$

Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

BRUDNOPIS

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wówczas

A. $\alpha < 30^o$ **B.** $\alpha = 30^o$ **C.** $\alpha = 45^o$ **D.** $\alpha > 45^o$

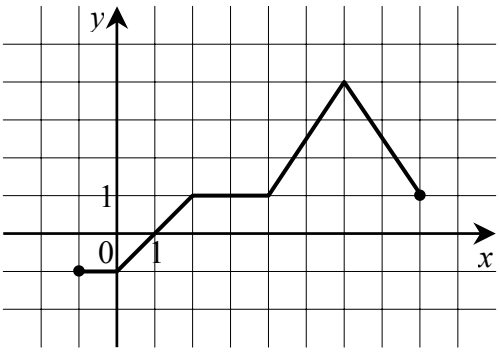
Zadanie 8. *(1 pkt)*

Liczba $7^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{7^5}$ jest równa

A. $7^{\frac{4}{5}}$ **B.** 7^3 **C.** $7^{\frac{20}{9}}$ **D.** 7^2

Zadanie 9. *(1 pkt)*

Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona dla $x \in \langle -1, 8 \rangle$, której wykres jest przedstawiony na rysunku:



Wskaż zbiór wartości tej funkcji.

A. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **B.** $(-1, 4)$ **C.** $\langle -1, 4 \rangle$ **D.** $\langle -1, 8 \rangle$

Zadanie 10. *(1 pkt)*

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a piąty wyraz tego ciągu jest równy 1. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 4 **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** 16 **D.** $16\sqrt{2}$

Zadanie 11. *(1 pkt)*

Pewien wielościan ma 6 krawędzi. Liczba jego ścian jest równa

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 9

Zadanie 12. *(1 pkt)*

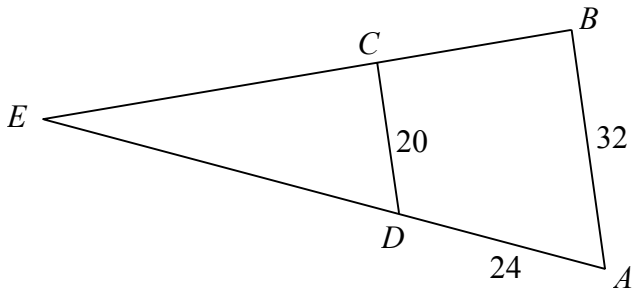
Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = (x-3)^2 - 2$ **nie ma** punktów wspólnych z prostą o równaniu

A. $y = -3$ **B.** $y = -1$ **C.** $y = 1$ **D.** $y = 3$

BRUDNOPIS

Zadanie 13. *(1 pkt)*

Odcinki *AB* i *CD* są równoległe. Długości odcinków *AB*, *CD* i *AD* są podane na rysunku.



Długość odcinka *DE* jest równa

A. 44 **B.** 40 **C.** 36 **D.** 15

Zadanie 14. *(1 pkt)*

Wskaż równanie okręgu o środku $S=(1,-2)$ i promieniu $r=2$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

B. $(x+1)^2+(y-2)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

D. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

Zadanie 15. *(1 pkt)*

Równanie $\frac{2x+1}{x}=3x$

A. ma dwa rozwiązania: $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$.

B. ma dwa rozwiązania: $x=\frac{1}{3}$, $x=1$.

C. nie ma żadnego rozwiązania.

D. ma tylko jedno rozwiązanie: $x=1$.

Zadanie 16. *(1 pkt)*

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 24. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 64 **B.** 27 **C.** 24 **D.** 8

BRUDNOPIS

Zadanie 17. *(1 pkt)*

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n(n^2 - 2n)$ dla $n \geq 1$. Wtedy

A. $a_3 > 3$ **B.** $a_3 = 3$ **C.** $a_3 < 2$ **D.** $a_3 = 2$

Zadanie 18. *(1 pkt)*

Liczba $\log 12$ jest równa

A. $\log 3 \cdot \log 4$ **B.** $\log 3 + \log 4$ **C.** $\log 16 - \log 4$ **D.** $\log 10 + \log 2$

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 > 4x$ jest

A. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

B. $(4, \infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Zadanie 20. *(1 pkt)*

Prosta l ma równanie $y = -7x + 2$. Równanie prostej prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $P = (0,1)$ ma postać

A. $y = 7x - 1$ **B.** $y = 7x + 1$ **C.** $y = \frac{1}{7}x + 1$ **D.** $y = \frac{1}{7}x - 1$

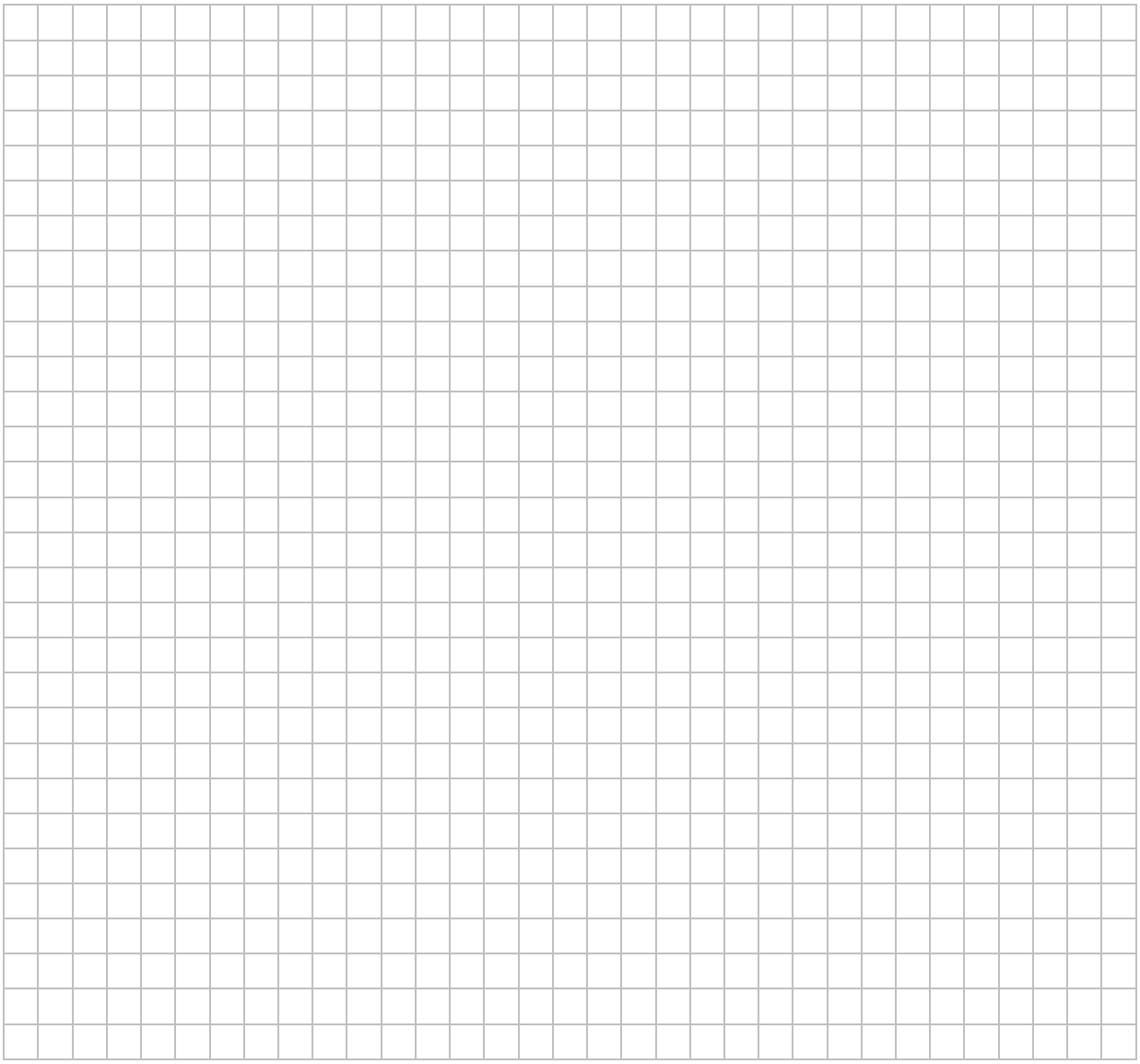
BRUDNOPIS

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 21. do 29. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 21. *(2 pkt)*

Punkty $A=(-3,-5)$, $B=(4,-1)$, $C=(-2,3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.



Odpowiedź: ……..….. .

Zadanie 22. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$.

Odpowiedź: ……..….. .

Zadanie 23. *(2 pkt)*

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Odpowiedź: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$ .....

Zadanie 24. *(2 pkt)*

Uczeń otrzymał pięć ocen: 5, 3, 6, x, 3. Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 4. Oblicz x i medianę tych pięciu ocen.

Odpowiedź: $x = ...$, a mediana tych pięciu ocen jest równa …….. .

Zadanie 25. *(2 pkt)*

Liczby $x-2,\ 3,\ x+6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Odpowiedź: $x = ...$

Zadanie 26. *(6 pkt)*

Do zbiornika o pojemności $700m^3$ można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o $5m^3$ wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Zadanie 27. *(4 pkt)*

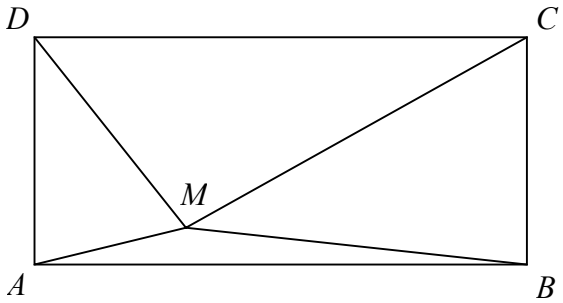
Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką, której jedna ściana ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

Zadanie 28. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Punkt D jest środkiem krawędzi AB, odcinek DS jest wysokością ostrosłupa. Krawędzie AS i BS mają długość 7. Oblicz długość krawędzi CS tego ostrosłupa.

Zadanie 29. *(5 pkt)*

Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$.



BRUDNOPIS

Karta odpowiedzi

Wypełnia piszący

Nr zadania	A	B	C	D
1.	☐	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☐
7.	☐	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☐	☐
9.	☐	☐	☐	☐
10.	☐	☐	☐	☐
11.	☐	☐	☐	☐
12.	☐	☐	☐	☐
13.	☐	☐	☐	☐
14.	☐	☐	☐	☐
15.	☐	☐	☐	☐
16.	☐	☐	☐	☐
17.	☐	☐	☐	☐
18.	☐	☐	☐	☐
19.	☐	☐	☐	☐
20.	☐	☐	☐	☐

Wypełnia sprawdzający

Nr zadania	X	0	1	2
21.	☐	☐	☐	☐
22.	☐	☐	☐	☐
23.	☐	☐	☐	☐
24.	☐	☐	☐	☐
25.	☐	☐	☐	☐

Nr zadania	X	0	1	2	3	4	5	6
26.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
27.	☐	☐	☐	☐	☐	☐		
28.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
29.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	

Suma punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cyfra dziesiątek	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Cyfra jednostek	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

D	**J**

Zestaw P2

Odpowiedzi do zadań zamkniętych.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	**B**	**A**	**C**	**D**	**A**	**A**	**D**	**B**	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**C**	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**

Odpowiedzi do zadań otwartych.

Numer zadania	Odpowiedź
21	$\|AB\| = \|AC\| = \sqrt{65}$
22	$x = 4,\ x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$
23	$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{5}$
24	$x = 3$, mediana jest równa 3
25	$x = 1$
26	23 godziny 20 minut
27	$\frac{4}{9}$
28	$\|CS\| = 9$
29	Dowód

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

Rozwiązanie zadania oceniamy według tego, jak daleko dotarł rozwiązujący na drodze do całkowitego rozwiązania zadania. Rozwiązanie zadania przydzielamy do jednej z następujących kategorii:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu;
2. został dokonany istotny krok w kierunku rozwiązania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania;
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki;
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, rozwiązanie zadania nie zostało dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły poważne błędy merytoryczne;
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.);
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie.

PRZYKŁADY OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 1. *(6 pkt)*

Dwa pociągi osobowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 616 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 11 km/h mniejszą. Pociągi te dojechały do celu w tym samym momencie. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... **1 pkt**

Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednego z pociągów, np.: $616 = v \cdot t$ (dla pociągu jadącego z miasta B do miasta A)

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla pociągu wyjeżdżającego z B:

$$\begin{cases} 616 = v \cdot t \\ 616 = (v - 11) \cdot (t + 1) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą v lub t, np:

$616=(v-11)\cdot\left(\frac{616}{v}+1\right)$ lub $616=\left(\frac{616}{t}-11\right)\cdot(t+1)$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki ..... **2 pkt**

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... **4 pkt lub 5 pkt**

- doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego ..... 4 pkt
- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie i nieobliczenie prędkości pociągów albo rozwiązanie równania z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu pociągów ..... 5 pkt

Rozwiązanie bezbłędne ..... **6 pkt**

Obliczenie prędkości pociągów: 77 km/h i 88 km/h.

Uwagi do schematu oceniania zadania 1.

1. Jeżeli zdający poda tylko odpowiedź, to otrzymuje 0 pkt – zdający nie stosuje się do instrukcji dla zdającego umieszczonej na pierwszej stronie arkusza (punkt 4.).

2. Jeżeli zdający oznacza:
   v – prędkość pociągu z A,
   t – czas przejazdu pociągu z B,
   lub odwrotnie i zapisze równanie: $v\cdot t=616$, to otrzymuje 0 pkt (brak postępu).

3. Jeżeli zdający pomyli jednostki lub porównuje wielkości różnych typów, np. czas i prędkość, to otrzymuje 0 pkt.

4. Jeżeli zdający zapisał układ równań
   $\begin{cases} v\cdot t=616 \\ (v-11)\cdot(t-1)=616 \end{cases}$ lub $\begin{cases} v\cdot t=616 \\ (v+11)\cdot(t+1)=616 \end{cases}$
   to otrzymuje 1 pkt (za postęp).

Zadanie 2. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Punkt D jest środkiem krawędzi AB, odcinek DS jest wysokością ostrosłupa. Krawędzie AS i BS mają długość 7. Oblicz długość krawędzi CS tego ostrosłupa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Wykonanie rysunku ostrosłupa, zaznaczenie na nim odcinka DS będącego jego wysokością oraz zaznaczenie, że odcinek ten jest jednocześnie wysokością ściany bocznej ABS.

Uwaga. Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **4 pkt**

Zdający poprawnie obliczy wysokość podstawy $h = 4\sqrt{3}$ oraz wysokość ostrosłupa $H = \sqrt{33}$.

Uwaga. Jeżeli jedną z tych wysokości zdający obliczy z błędem rachunkowym i na tym skończy rozwiązywanie zadania, to otrzymuje 3 pkt

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... **4 pkt**

Zdający popełni **jeden** błąd rachunkowy przy obliczaniu długości dowolnego spośród trzech odcinków DC, DS, CS.

Rozwiązanie bezbłędne ..... **5 pkt**

Obliczenie długości krawędzi CS: $|CS| = 9$.

Przyznajemy 0 pkt, gdy zdający źle zinterpretuje treść zadania.

VIII. ZBIÓR PRZYKŁADOWYCH ZADAŃ MATURALNYCH

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (1 pkt)

Liczba $3^{30} \cdot 9^{90}$ jest równa

A. 3^{210} **B.** 3^{300} **C.** 9^{120} **D.** 27^{2700}

Zadanie 2. (1 pkt)

Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa

A. 3^3 **B.** $3^{\frac{32}{9}}$ **C.** 3^4 **D.** 3^5

Zadanie 3. (1 pkt)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2 + \log 20$ **B.** $\log 6 + 2\log 2$ **C.** $2\log 6 - \log 12$ **D.** $\log 30 - \log 6$

Zadanie 4. (1 pkt)

Liczba 30 to $p\%$ liczby 80, zatem

A. $p < 40$ **B.** $p = 40$ **C.** $p = 42,5$ **D.** $p > 42,5$

Zadanie 5. (1 pkt)

4% liczby x jest równe 6, zatem

A. $x = 150$ **B.** $x < 150$ **C.** $x = 240$ **D.** $x > 240$

Zadanie 6. (1 pkt)

Liczba y to 120% liczby x. Wynika stąd, że

A. $y = x + 0,2$ **B.** $y = x + 0,2x$ **C.** $x = y - 0,2$ **D.** $x = y - 0,2y$

Zadanie 7. (1 pkt)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

A. $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Zadanie 8. (1 pkt)

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest

A. -6 **B.** -3 **C.** -2 **D.** -1

Zadanie 9. (1 pkt)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2-m)x+1$. Wynika stąd, że

A. $m=0$ **B.** $m=1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=3$

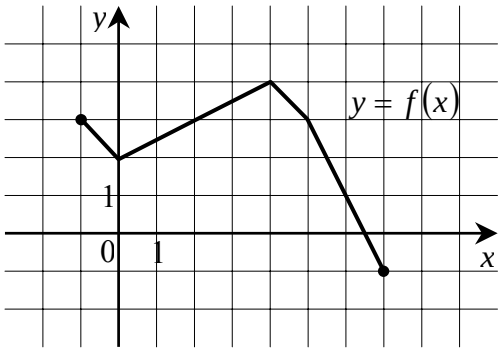
Zadanie 10. (1 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases}-3x+4 \text{ dla } x<1\\ 2x-1 \text{ dla } x\geq 1\end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

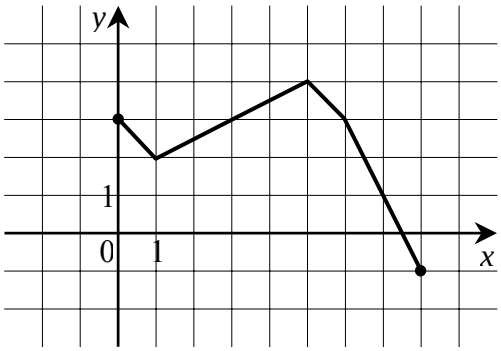
Zadanie 11. (1 pkt)

Rysunek przedstawia wykres funkcji $y=f(x)$.

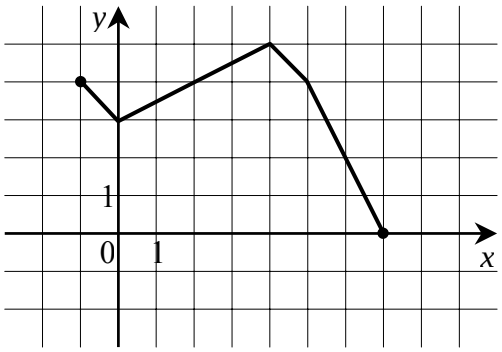


Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y=f(x+1)$.

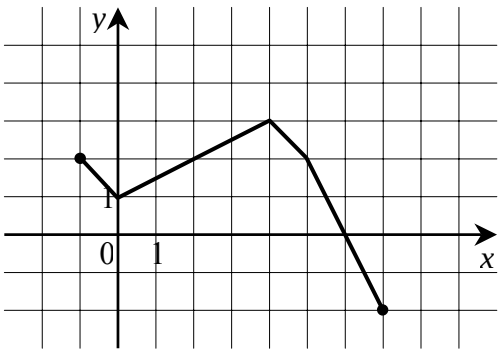
A.



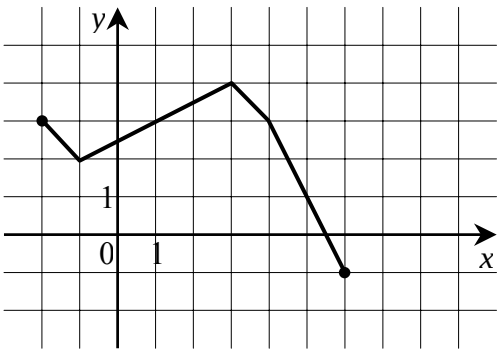
B.



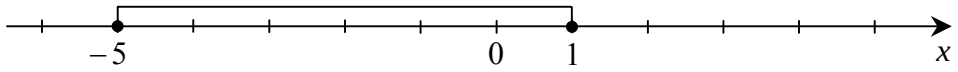
C.

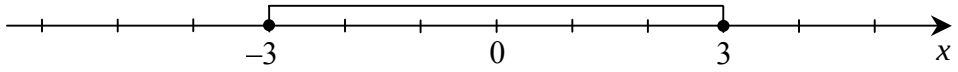


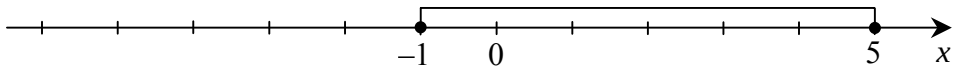
D.

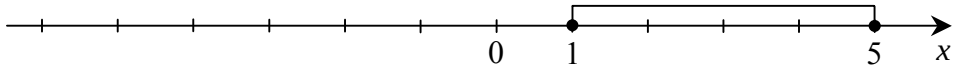


Zadanie 12. (1 pkt)
Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$?

A.


B.


C.


D.


Zadanie 13. (1 pkt)
Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y=-x^2+4x-11$.

A. $x=-4$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=2$ **D.** $x=4$

Zadanie 14. (1 pkt)
Wskaż funkcję kwadratową, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty,3\rangle$.

A. $f(x)=-(x-2)^2+3$

B. $f(x)=(2-x)^2+3$

C. $f(x)=-(x+2)^2-3$

D. $f(x)=(2-x)^2-3$

Zadanie 15. (1 pkt)
Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2\geq 5$ jest

A. $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$ **B.** $(-\infty,-\sqrt{5}\rangle\cup\langle\sqrt{5},+\infty)$ **C.** $\langle\sqrt{5},+\infty)$ **D.** $\langle 5,+\infty)$

Zadanie 16. (1 pkt)
Wykres funkcji kwadratowej $f(x)=3(x+1)^2-4$ **nie ma** punktów wspólnych z prostą o równaniu

A. $y=1$ **B.** $y=-1$ **C.** $y=-3$ **D.** $y=-5$

Zadanie 17. (1 pkt)
Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że

A. $a = 3$ **B.** $a = 0$ **C.** $a = -1$ **D.** $a = -3$

Zadanie 18. (1 pkt)
Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x - 3$ w przedziale $\langle 0,3 \rangle$?

A. -7 **B.** -4 **C.** -3 **D.** -2

Zadanie 19. (1 pkt)
Dane są wielomiany $W(x) = 3x^3 - 2x, V(x) = 2x^2 + 3x$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot V(x)$ jest równy

A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

Zadanie 20. (1 pkt)
Ile rozwiązań rzeczywistych ma równanie $5x^4 - 13 = 0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 21. (1 pkt)
Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{11 - x}{x^2 - 11} = 0$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 22. (1 pkt)
Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 7$.

A. $y = -2x + 7$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x + 5$ **C.** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **D.** $y = 2x - 1$

Zadanie 23. (1 pkt)
Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 4x + 5$?

A. $y = -4x + 3$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x + 3$ **C.** $y = \frac{1}{4}x + 3$ **D.** $y = 4x + 3$

Zadanie 24. (1 pkt)
Punkty $A = (-1,3)$ i $C = (7,9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta *ABCD*. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy

A. 10 **B.** $6\sqrt{2}$ **C.** 5 **D.** $3\sqrt{2}$

Zadanie 25. (1 pkt)

Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

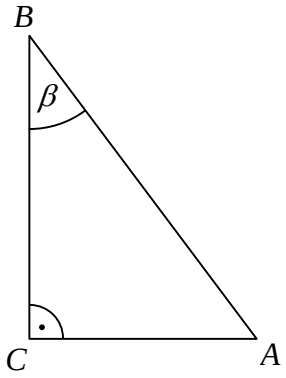
Zadanie 26. (1 pkt)

Środek S okręgu o równaniu $x^2+y^2+4x-6y-221=0$ ma współrzędne

A. $S=(-2,3)$ **B.** $S=(2,-3)$ **C.** $S=(-4,6)$ **D.** $S=(4,-6)$

Zadanie 27. (1 pkt)

Dane są długości boków $|BC|=5$ i $|AC|=3$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β (zobacz rysunek). Wtedy



A. $\sin\beta=\frac{3}{5}$ **B.** $\sin\beta=\frac{4}{5}$ **C.** $\sin\beta=\frac{3\sqrt{34}}{34}$ **D.** $\sin\beta=\frac{5\sqrt{34}}{34}$

Zadanie 28. (1 pkt)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha<\frac{3}{4}$ **B.** $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{4}$ **D.** $\cos\alpha>\frac{\sqrt{13}}{4}$

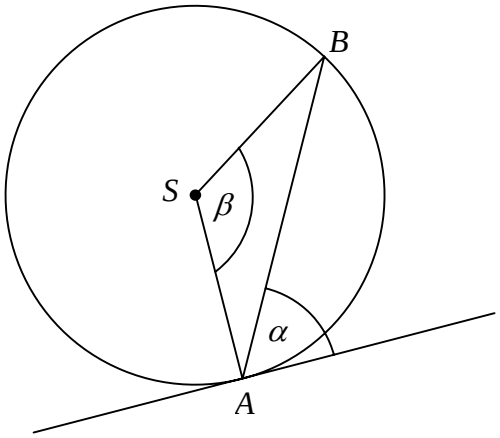
Zadanie 29. (1 pkt)

Kąt α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α?

A. $\alpha<30^\circ$ **B.** $\alpha=30^\circ$ **C.** $\alpha=60^\circ$ **D.** $\alpha>60^\circ$

Zadanie 30. (1 pkt)

Kąt między cięciwą *AB* a styczną do okręgu w punkcie *A* (zobacz rysunek) ma miarę $\alpha = 62^\circ$. Wówczas



A. $\beta = 118^\circ$ **B.** $\beta = 124^\circ$ **C.** $\beta = 138^\circ$ **D.** $\beta = 152^\circ$

Zadanie 31. (1 pkt)

Kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60° **B.** 90° **C.** 120° **D.** 135°

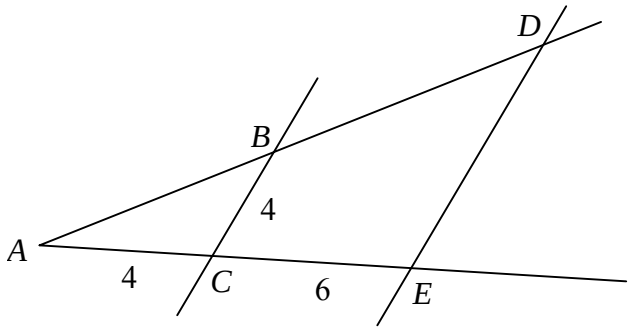
Zadanie 32. (1 pkt)

Różnica miar kątów wewnętrznych przy ramieniu trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, jest równa 40°. Miara kąta przy krótszej podstawie tego trapezu jest równa

A. 120° **B.** 110° **C.** 80° **D.** 70°

Zadanie 33. (1 pkt)

Odcinki *BC* i *DE* są równoległe. Długości odcinków *AC*, *CE* i *BC* są podane na rysunku. Długość odcinka *DE* jest równa



A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Zadanie 34. (1 pkt)
Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 4 cm jest równe

A. $64\ \text{cm}^2$ **B.** $32\ \text{cm}^2$ **C.** $16\ \text{cm}^2$ **D.** $8\ \text{cm}^2$

Zadanie 35. (1 pkt)
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$ **B.** $a_3 = -27$ **C.** $a_3 = 0$ **D.** $a_3 > 0$

Zadanie 36. (1 pkt)
Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba *x* jest równa

A. 3 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -7

Zadanie 37. (1 pkt)
Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba *x* jest równa

A. -3 **B.** $-1{,}5$ **C.** 1 **D.** 15

Zadanie 38. (1 pkt)
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25 **B.** 24 **C.** 21 **D.** 20

Zadanie 39. (1 pkt)
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, których obie cyfry są mniejsze od 5 jest

A. 16 **B.** 20 **C.** 25 **D.** 30

Zadanie 40. (1 pkt)
Liczba sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 12

Zadanie 41. (1 pkt)
Mediana danych: 0, 1, 1, 2, 3, 1 jest równa

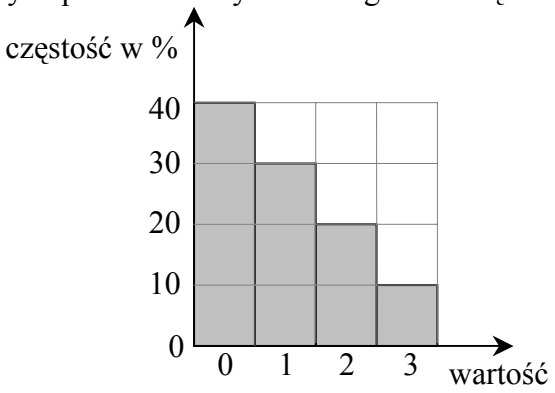
A. 1 **B.** 1,5 **C.** 2 **D.** 2,5

Zadanie 42. (1 pkt)
Mediana danych przedstawionych w tabeli liczebności jest równa

wartość	0	1	2	3
liczebność	5	2	1	1

A. 0 **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 5

Zadanie 43. (1 pkt)
Średnia arytmetyczna danych przedstawionych na diagramie częstości jest równa



A. 1 **B.** 1,2 **C.** 1,5 **D.** 1,8

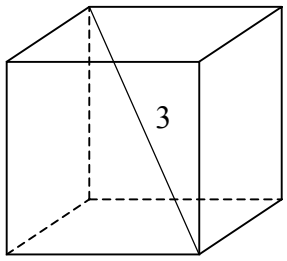
Zadanie 44. (1 pkt)
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Liczba p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3. Wtedy

A. $p < 0,25$ **B.** $p = 0,25$ **C.** $p = \frac{1}{3}$ **D.** $p > \frac{1}{3}$

Zadanie 45. (1 pkt)
O zdarzeniach losowych A i B są zawartych w Ω wiadomo, że $B \subset A$, $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,3$. Wtedy

A. $P(A \cup B) = 1$ **B.** $P(A \cup B) = 0,7$ **C.** $P(A \cup B) = 0,4$ **D.** $P(A \cup B) = 0,3$

Zadanie 46. (1 pkt)
Przekątna sześcianu ma długość 3. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

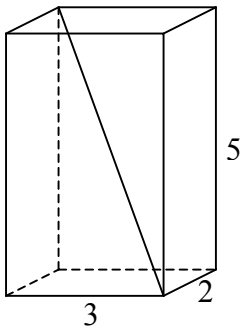


A. 54 **B.** 36 **C.** 18 **D.** 12

Zadanie 47. (1 pkt)
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 24 cm^2. Objętość tego sześcianu jest równa

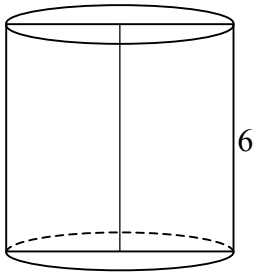
A. 8 cm^3 **B.** 16 cm^3 **C.** 27 cm^3 **D.** 64 cm^3

Zadanie 48. (1 pkt)
Przekątna prostopadłościanu o wymiarach $2 \times 3 \times 5$ ma długość



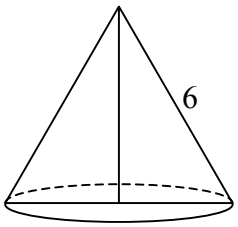
A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{29}$ **C.** $\sqrt{34}$ **D.** $\sqrt{38}$

Zadanie 49. (1 pkt)
Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 6. Objętość tego walca jest równa



A. 18π **B.** 54π **C.** 108π **D.** 216π

Zadanie 50. (1 pkt)
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 6. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe



A. 12π **B.** 18π **C.** 27π **D.** 36π

ZADANIA OTWARTE KRÓTKIEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 51. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$.

Zadanie 52. (2 pkt)
Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$.

Zadanie 53. (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $x^2+6x-7\le 0$.

Zadanie 54. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $2x^3-x^2-6x+3=0$.

Zadanie 55. (2 pkt)
O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1)=2$ oraz, że do wykresu tej funkcji należy punkt $P=(-2,3)$. Wyznacz wzór funkcji *f*.

Zadanie 56. (2 pkt)
Oblicz miejsca zerowe funkcji

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 \text{ dla } x\le 0 \\ x+2 \text{ dla } x>0 \end{cases}.$$

Zadanie 57. (2 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 \text{ dla } x\le 0 \\ x+2 \text{ dla } x>0 \end{cases}.$$

Zadanie 58. (2 pkt)
Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-6x+1$ w przedziale $\langle 0,1\rangle$.

Zadanie 59. (2 pkt)
Wielomiany $W(x)=ax(x+b)^2$ i $V(x)=x^3+2x^2+x$ są równe. Oblicz a i b.

Zadanie 60. (2 pkt)
Wyrażenie $\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+1}$ zapisz w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

Zadanie 61. (2 pkt)
Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $2x-y-11=0$ i przechodzącej przez punkt $P=(1,2)$.

Zadanie 62. (2 pkt)
Wyznacz równanie okręgu stycznego do osi *Oy*, którego środkiem jest punkt $S=(3,-5)$.

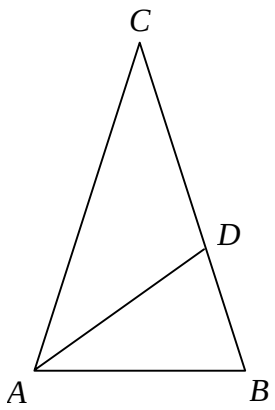
Zadanie 63. (2 pkt)
Wyznacz równanie okręgu o środku $S=(3,-5)$ przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 64. (2 pkt)
Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty: $A=(-2,-1), B=(6,1), C=(7,10)$.

Zadanie 65. (2 pkt)
W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Zadanie 66. (2 pkt)
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Oblicz $3+2\mathrm{tg}^2\alpha$.

Zadanie 67. (2 pkt)
Punkt *D* leży na boku *BC* trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$. Odcinek *AD* dzieli trójkąt *ABC* na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AB|=|AD|=|CD|$ (patrz rysunek). Oblicz miary kątów trójkąta *ABC*.



Zadanie 68. (2 pkt)
Oblicz pole trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $|AB|=24$ i $|AC|=|BC|=13$.

Zadanie 69. (2 pkt)
Liczby 4, 10, *c* są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz *c*.

Zadanie 70. (2 pkt)
Liczby 6, 10, *c* są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz *c*.

Zadanie 71. (2 pkt)
Liczby 6, 10, *c* są długościami boków trójkąta prostokątnego. Oblicz *c*.

Zadanie 72. (2 pkt)
Liczby $x-1$, *x*, 5 są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz *x*.

Zadanie 73. (2 pkt)
Obwód czworokąta wypukłego *ABCD* jest równy 50 cm. Obwód trójkąta *ABD* jest równy 46 cm, a obwód trójkąta *BCD* jest równy 36 cm. Oblicz długość przekątnej *BD*.

Zadanie 74. (2 pkt)
Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

Zadanie 75. (2 pkt)
Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz *x*.

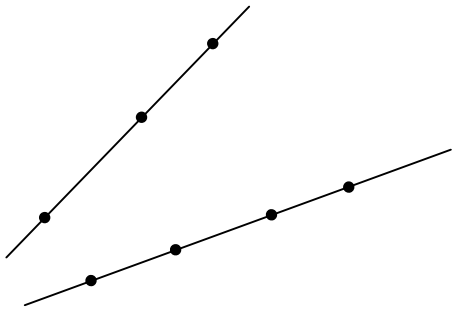
Zadanie 76. (2 pkt)
Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Zadanie 77. (2 pkt)
Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste?
Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Zadanie 78. (2 pkt)
Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

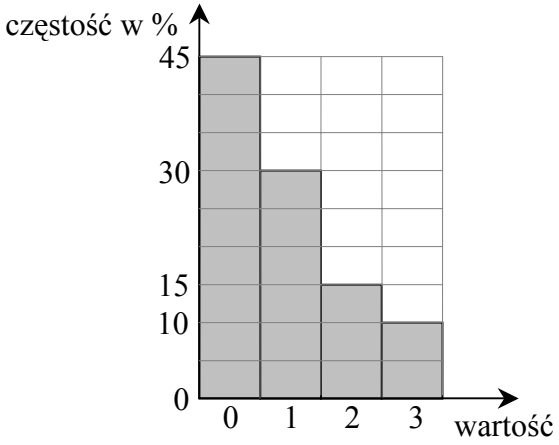
Zadanie 79. (2 pkt)
Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności?

Zadanie 80. (2 pkt)
Na jednej prostej zaznaczono 3 punkty, a na drugiej 4 punkty (patrz rysunek). Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów ?



Zadanie 81. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb: 3, 1, 1, 0, *x*, 0 jest równa 2. Oblicz *x*.

Zadanie 82. (2 pkt)
Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie częstości



Zadanie 83. (2 pkt)
Oblicz medianę danych: 0, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 1.

Zadanie 84. (2 pkt)
Oblicz medianę danych przedstawionych w postaci tabeli liczebności

wartość	0	1	2	3
liczebność	4	3	1	1

Zadanie 85. (2 pkt)
Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 lub przez 2.

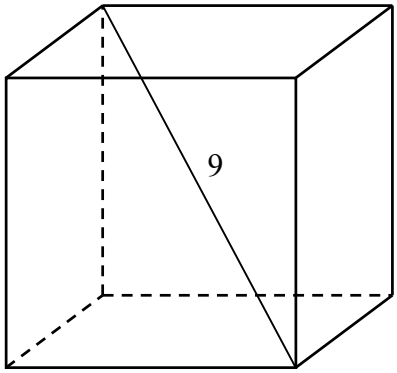
Zadanie 86. (2 pkt)
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 15.

Zadanie 87. (2 pkt)
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego 5.

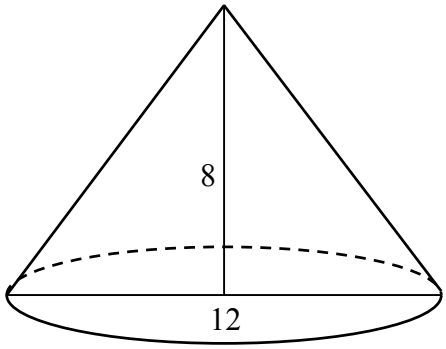
Zadanie 88. (2 pkt)
A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadanie 89. (2 pkt)
A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \setminus A$.

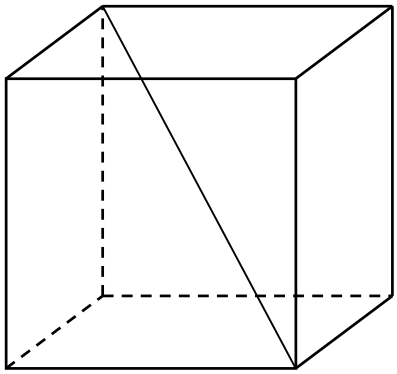
Zadanie 90. (2 pkt)
Przekątna sześcianu ma długość 9. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.



Zadanie 91. (2 pkt)
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 12. Wysokość stożka jest równa 8. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

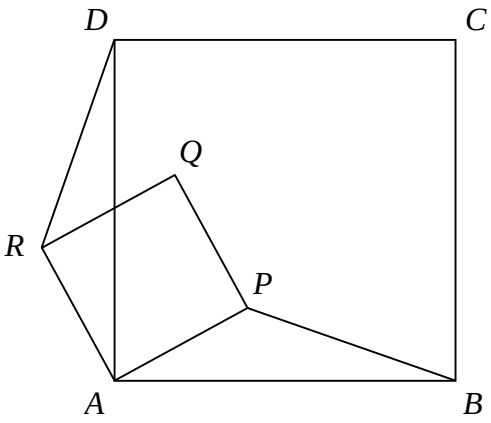


Zadanie 92. (2 pkt)
Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



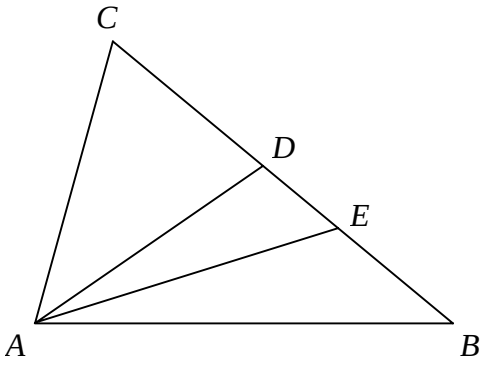
Zadanie 93. (2 pkt)

Czworokąty *ABCD* i *APQR* są kwadratami (patrz rysunek). Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Zadanie 94. (2 pkt)

Na boku *BC* trójkąta *ABC* wybrano punkt *D* tak, by $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ABC|$. Odcinek *AE* jest dwusieczną kąta *DAB*. Udowodnij, że $|AC| = |CE|$.



ZADANIA OTWARTE ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 95.
Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr wybranych ze zbioru {0, 1, 2, 3}.

Zadanie 96.
Z pojemnika, w którym są dwa losy wygrywające i trzy losy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 97.
Z miejscowości *A* i *B* oddalonych od siebie o 182 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z miejscowości *B* do miejscowości *A* jedzie ze średnią prędkością mniejszą od 25 km/h. Rowerzysta jadący z miejscowości *A* do miejscowości *B* wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty. Rowerzyści spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z miejscowości *A* przebył do tego miejsca $\frac{9}{13}$ całej drogi z *A* do *B*. Z jakimi średnimi prędkościami jechali obaj rowerzyści?

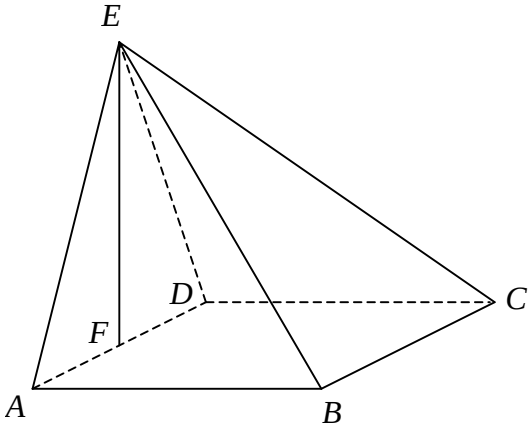
Zadanie 98.
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał taką samą liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Zadanie 99.
Liczby *a*, *b*, *c* tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz *a*, *b* i *c*.

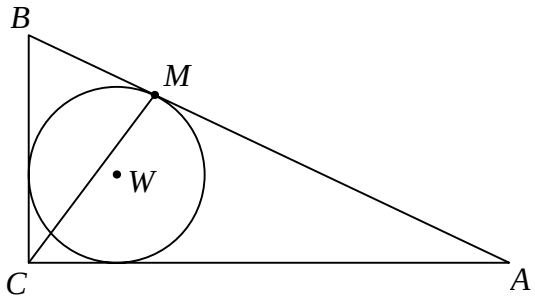
Zadanie 100.
Wyznacz wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że suma pierwszych pięciu jego wyrazów jest równa 10, a wyrazy trzeci, piąty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

Zadanie 101.
Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* jest kwadrat *ABCD*. Pole trójkąta równoramiennego *ACS* jest równe 120 oraz $|AC| : |AS| = 10 : 13$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

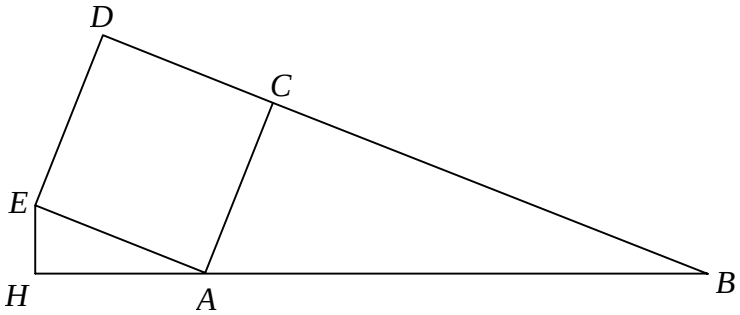
Zadanie 102.
Podstawą ostrosłupa *ABCDE* jest kwadrat *ABCD*. Punkt *F* jest środkiem krawędzi *AD*, odcinek *EF* jest wysokością ostrosłupa (patrz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli wiadomo, że $|AE| = 15$, $|BE| = 17$.



Zadanie 103.
Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym $|BC| = 30$, $|AC| = 40$, $|AB| = 50$. Punkt *W* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg wpisany w trójkąt *ABC* jest styczny do boku *AB* w punkcie *M*. Oblicz długość odcinka *CM*.



Zadanie 104.
Na zewnątrz trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5, |BC| = 12$ zbudowano kwadrat *ACDE* (patrz rysunek). Punkt *H* leży na prostej *AB* i kąt $|\sphericalangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta *HAE*.



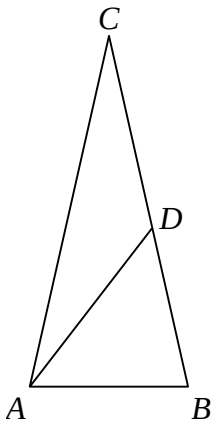
Zadanie 105.
Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

Zadanie 106.
Udowodnij, że jeśli

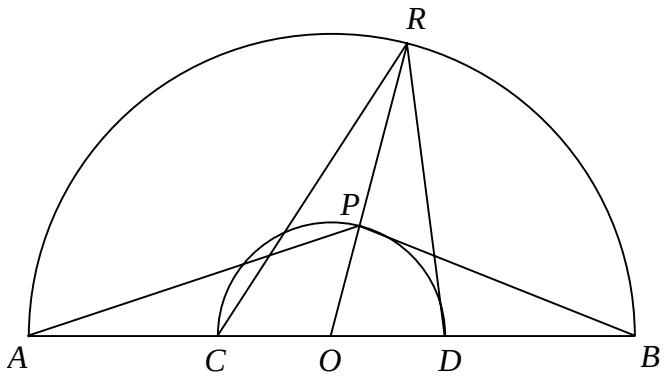
a) x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

b) x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Zadanie 107.
Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (patrz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$.



Zadanie 108.
Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe). Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CRD| = 180°$.



Przykładowe zadania

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	**A**	**C**	**B**	**A**	**A**	**B**	**D**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**	**C**	**A**	**B**	**D**	**C**	**C**	**B**	**B**	**B**	**D**	**B**	**C**	**C**

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	**B**	**B**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**

Odpowiedzi do zadań otwartych

Nr zadania	Odpowiedź
51	$x=\frac{5}{8}$
52	$x=2,\ y=1$
53	$x\in\langle -7,1\rangle$
54	$x=\frac{1}{2}$ lub $x=\sqrt{3}$ lub $x=-\sqrt{3}$
55	$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$
56	$x=-\frac{1}{2}$
57	wykres
58	$y=-4$
59	$a=1\ \ b=1$
60	$\frac{-x^2+6x+3}{(x-3)(x+1)}$
61	$2x-y=0$
62	$(x-3)^2+(y+5)^2=9$
63	$(x-3)^2+(y+5)^2=34$
64	$y=2x-4$
65	$\frac{2}{5}$

Nr zadania	Odpowiedź
80	30 trójkątów
81	$x=7$
82	0,9
83	1
84	1
85	$\frac{7}{11}$
86	$\frac{1}{15}$
87	$\frac{1}{18}$
88	0,4
89	0,4
90	162
91	60π
92	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
93	dowód
94	dowód

66	$\frac{47}{15}$		95	10392
67	$36°,\ 72°,\ 72°$		96	$\frac{7}{10}$
68	60		97	$7\,\mathrm{km/h}\,,\ 14\,\mathrm{km/h}$
69	$c=10$		98	15
70	$c=6$ lub $c=10$		99	$\begin{cases} a=3 \\ b=15 \\ c=75 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=31 \\ b=31 \\ c=31 \end{cases}$
71	$c=8$ lub $c=2\sqrt{34}$		100	$a_n=2$ lub $a_n=3n-7$
72	$x=5$ lub $x=6$		101	$20\sqrt{313}$
73	$\lvert BD\rvert=16$		102	$\frac{64\sqrt{209}}{3}$
74	5 wyrazów		103	$2\sqrt{145}$
75	$x=7$		104	$\frac{750}{169}$
76	$a_{15}=72$		105	dowód
77	2125		106	dowód
78	9 liczb		107	dowód
79	72 liczby		108	dowód

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul Łucka 11, 00-842 Warszawa
tel. 022 656 38 00, fax 022 656 37 57
www.cke.edu.pl ckesekr@cke.edu.pl

OKE Gdańsk
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk,
tel. (0-58) 320 55 90, fax.320 55 91
www.oke.gda.pl komisja@oke.gda.pl

OKE Jaworzno
ul. Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel.(0-32) 616 33 99 w.101
fax.616 33 99 w.108, www.oke.jaw.pl
oke@oke.jaw.pl

OKE Kraków
al. F. Focha 39, 30-119 Kraków
tel.(0-12) 618 12 01/02/03, fax.427 28 45
www.oke.krakow.pl oke@oke.krakow.pl

OKE Łomża
ul. Nowa 2, 18-400 Łomża
Tel/fax. (0-86) 216 44 95
www.okelomza.com
sekretariat@oke.lomza.com

OKE Łódź
ul. Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. (0-42) 634 91 33 s: 664 80 50/51/52
fax. 634 91 54
www.komisja.pl komisja@komisja.pl

OKE Poznań
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel.(0-61) 852 13 07, 852 13 12, fax. 852 14 41
www.oke.poznan.pl
sekretariat@oke.poznan.pl

OKE Warszawa
ul. Grzybowska 77, 00-844 Warszawa
tel. (0-22) 457 03 35, fax. 457 03 45
www.oke.waw.pl info@oke.waw.pl

OKE Wrocław
ul. Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. sek. (0-71) 785 18 52, fax. 785 18 73
www.oke.wroc.pl sekret@oke.wroc.pl