Matematyka Gryzie

Kursy do matury podstawowej i rozszerzonej

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2305

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY
☐ Uprawnienie zdającego do dostosowania w związku z dyskalkulią

DATA:

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

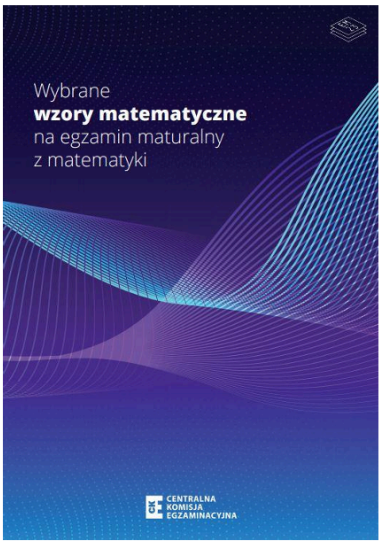
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1-15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu/pióra z czarnym tuszem/atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z Wybranych wzorów matematycznych, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



1.
0–1–2

Zadanie 1. (0–2)

Masa pewnej substancji promieniotwórczej w chwili początkowej $(t = 0)$ była równa 200 g. Okres połowicznego rozpadu tej substancji wynosi 8 lat. Dla każdej liczby rzeczywistej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji (w gramach) po t latach.

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych latach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza niż 30 g. Zapisz obliczenia.

2.
0–1–2

Zadanie 2. (0–2)

Niech $a = log_3 2$.

Wykaż, że $log_{24} 54 = \frac{3+a}{1+3a}$**. Zapisz obliczenia.**

3.
0–1–2–3

Zadanie 3. (0–3)

Rozwiąż nierówność

$$|x + 3| + |x - 5| \leq 12$$

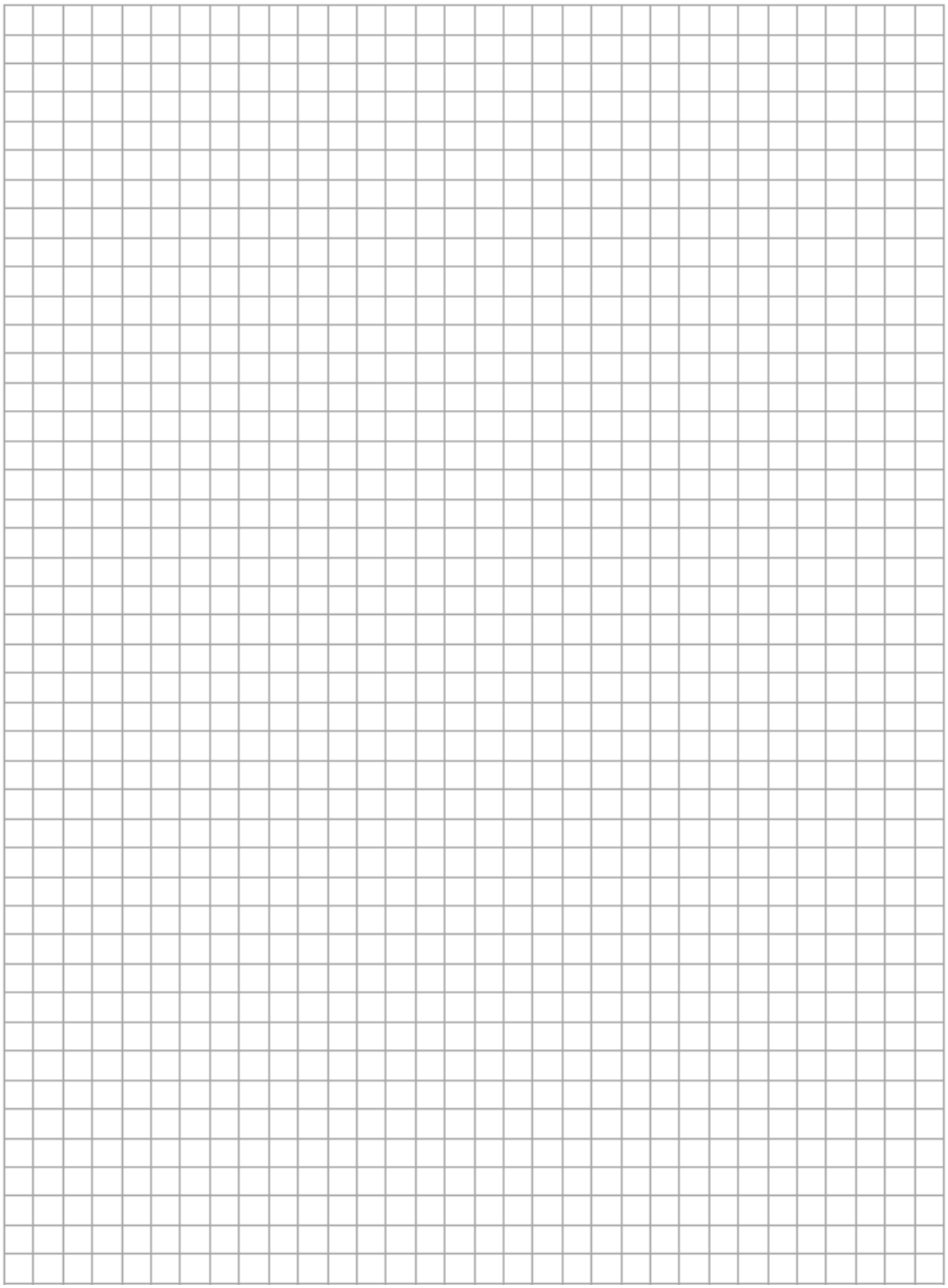
Zapisz obliczenia.

4.
0–1–2–3

Zadanie 4. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne czterocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym wszystkie cyfry są różne i które są podzielne przez 5.

Ile jest wszystkich takich liczb? Zapisz obliczenia.

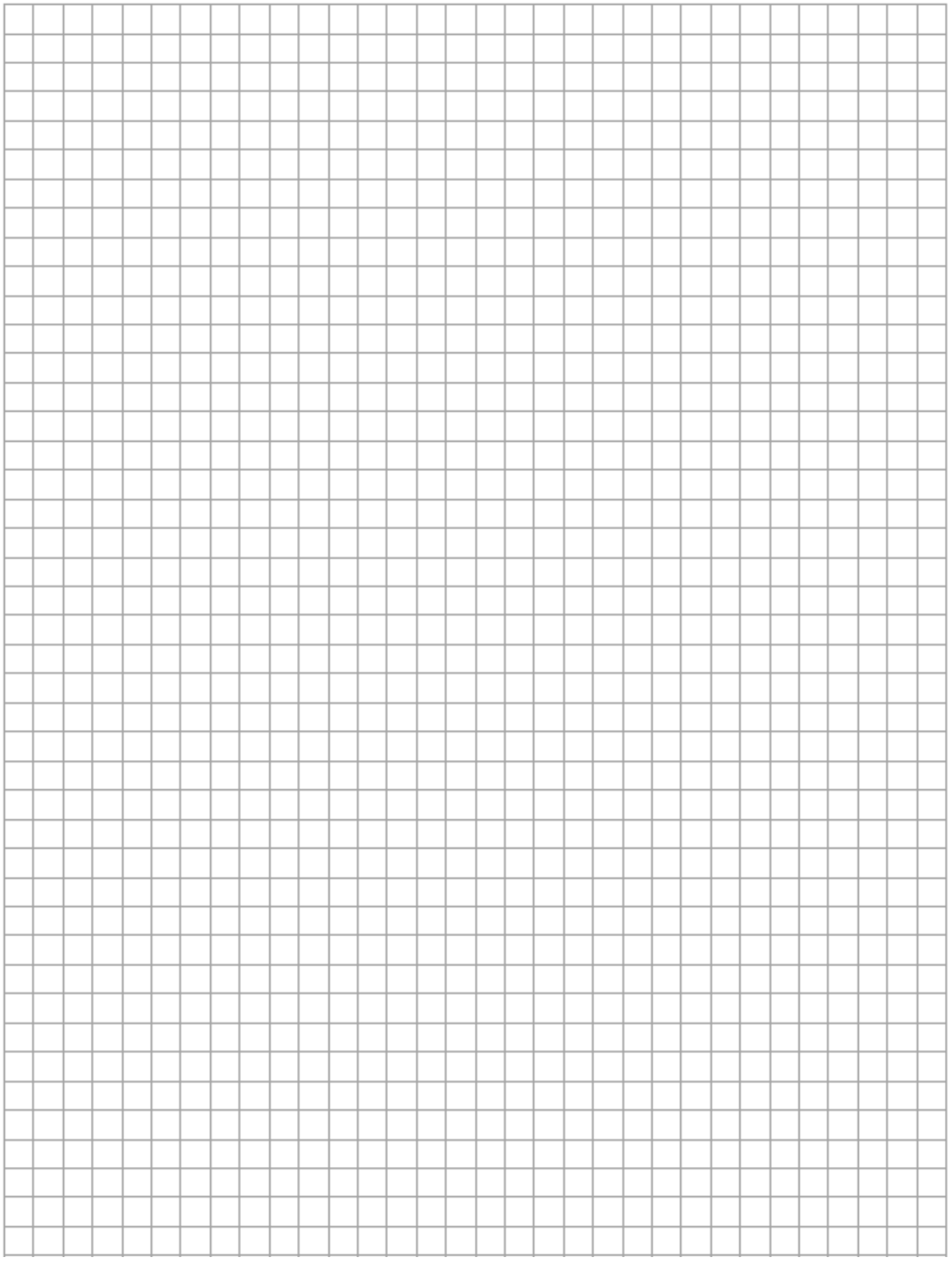


5.
0–1–2

Zadanie 5. (0–2)

Symetryczną sześcienną kostką do gry rzucamy osiem razy.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwa razy wypadnie liczba oczek podzielna przez 3. Wynik podaj w postaci dziesiętnej z dokładnością do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.



6.
0–1–2–3–4

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$cos(2x) + 3cos\, x + 2 = 0$$

w przedziale $[0, 2\pi]$**. Zapisz obliczenia.**

7.
0–1–2–3–4

Zadanie 7. (0–4)

Funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Wyznacz równania wszystkich stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 9x - 4$. Zapisz obliczenia.

8.
0–1–2–3

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

9.
0–1–2–3

Zadanie 9. (0–3)

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE, gdzie punkt D leży na boku BC, a punkt E leży na boku AC.

Wykaż, że trójkąty CDE i CAB są podobne.

10.
0–1–2–3–4

Zadanie 10. (0–4)

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki tego czworokąta mają długości: $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|CD| = 3$, $|AD| = 8$.

Oblicz długość przekątnej AC oraz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

11.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 11. (0–5)

Dane jest równanie

$$x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$$

z niewiadomą x i parametrem m, $m \in R$.

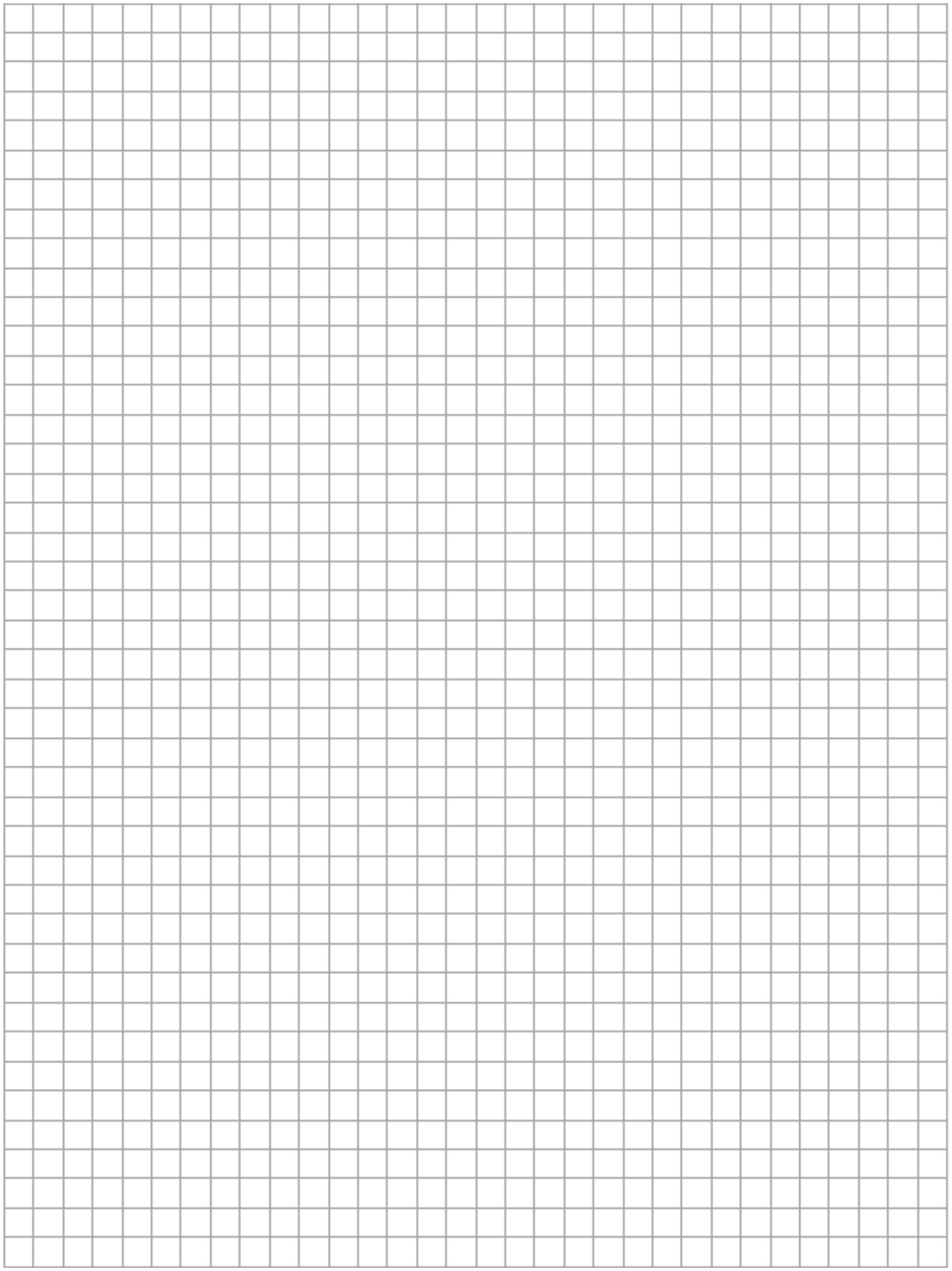
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 5$. Zapisz obliczenia.

12.
0–1–2–3

Zadanie 12. (0–3)

Trzy liczby tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeżeli do pierwszej z tych liczb dodamy 1, do drugiej dodamy 2, a do trzeciej dodamy 15, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

Wyznacz te trzy liczby. Zapisz obliczenia.



13.
0–1–2–3–4

Zadanie 13. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg o równaniu

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

oraz punkt $A = (4, 2)$ leżący na tym okręgu.

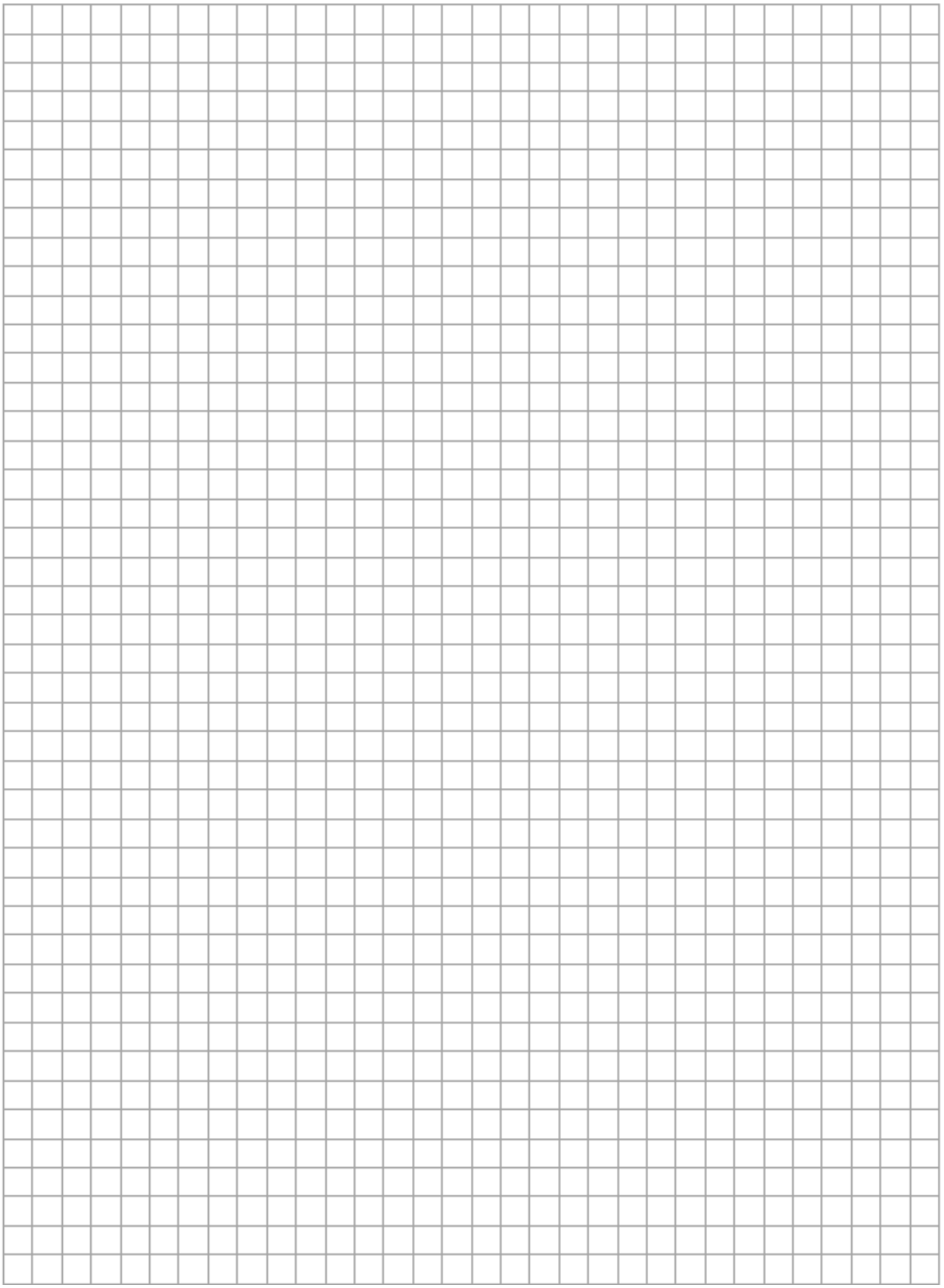
Wyznacz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie A oraz oblicz pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.

14.
0–1–2–3

Zadanie 14. (0–3)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a kąt dwuścienny między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ma miarę $60°$.

Oblicz objętość oraz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 15.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest parabola o równaniu $y = 9 - x^2$. Rozważamy wszystkie prostokąty o następujących własnościach: dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi Ox i są symetryczne względem osi Oy, a dwa pozostałe wierzchołki leżą na paraboli powyżej osi Ox. Pierwsza współrzędna wierzchołka leżącego na paraboli w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych jest równa x.

15.1.
0–1–2

Zadanie 15.1. (0–2)

Wykaż, że pole P tego prostokąta wyraża się wzorem

$$P(x) = 18x - 2x^3$$

gdzie $x \in (0, 3)$.

15.2.
0–1–2–3

Zadanie 15.2. (0–3)

Oblicz największe pole prostokąta o opisanych własnościach oraz wymiary tego prostokąta. Zapisz obliczenia.

