

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

☐

MMA-R1A1P-052

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron. Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

ARKUSZ II

MAJ
ROK 2005

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

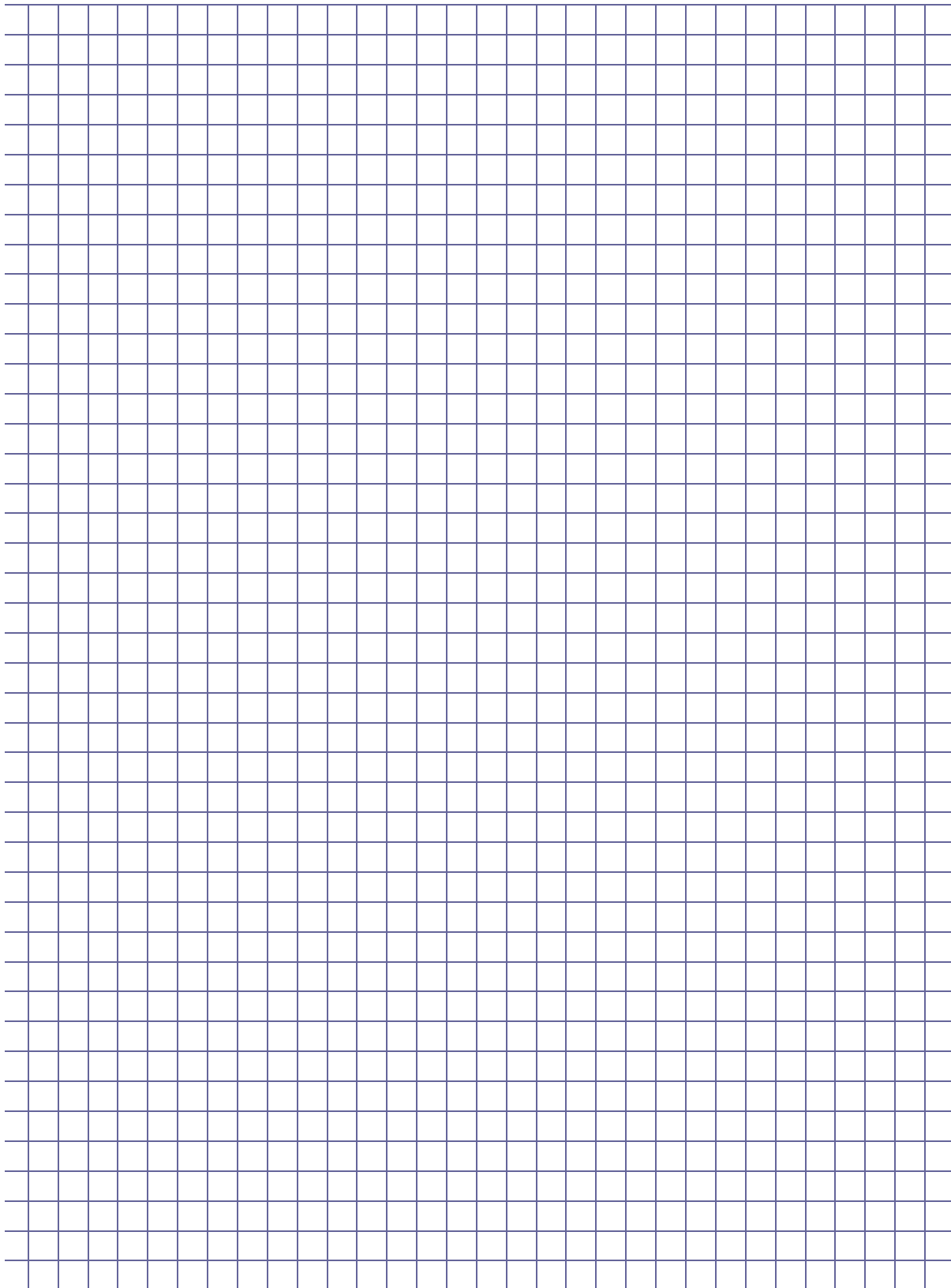
tylko
OKE Kraków,
OKE Wrocław

--	--	--

KOD
ZDAJĄCEGO

Zadanie 11. (3 pkt)

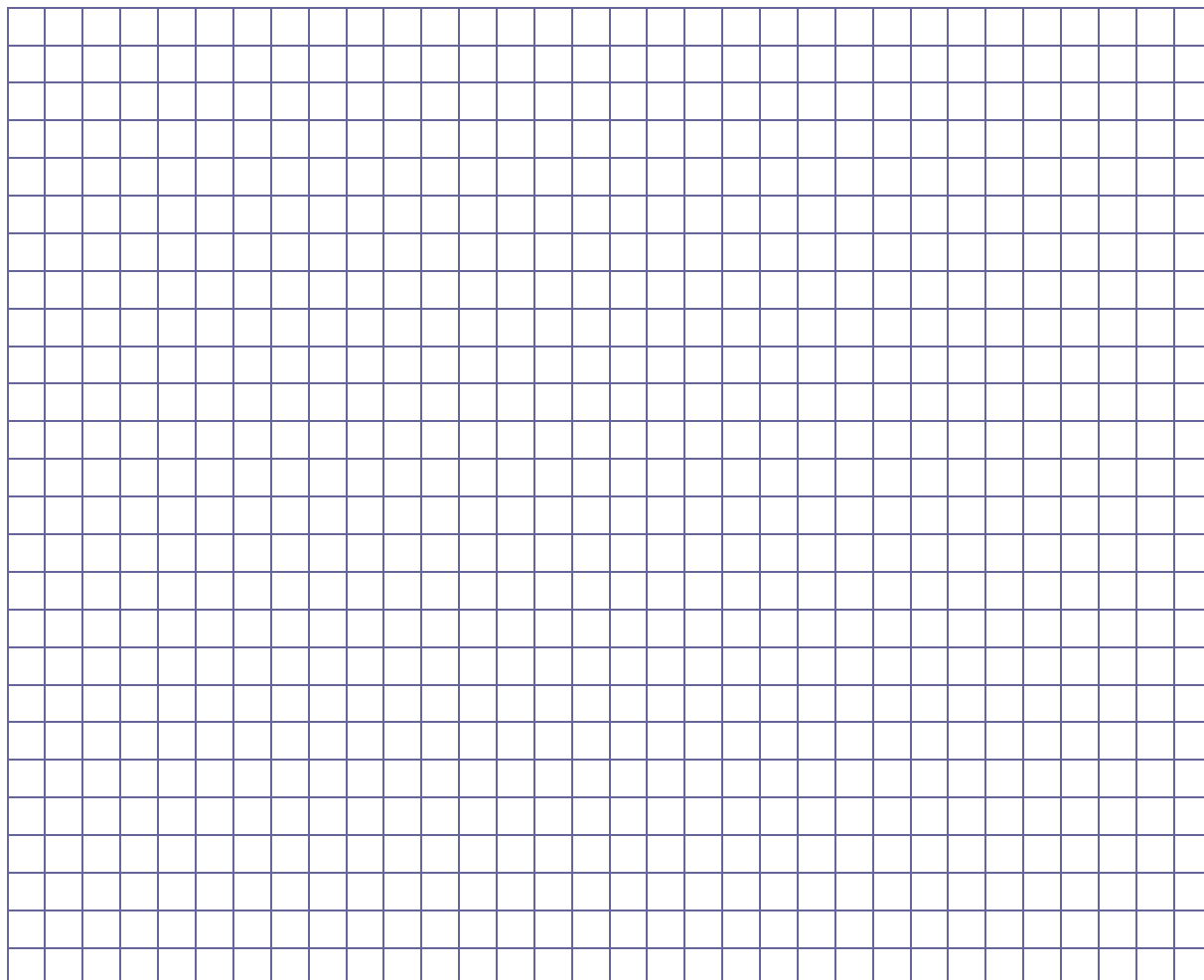
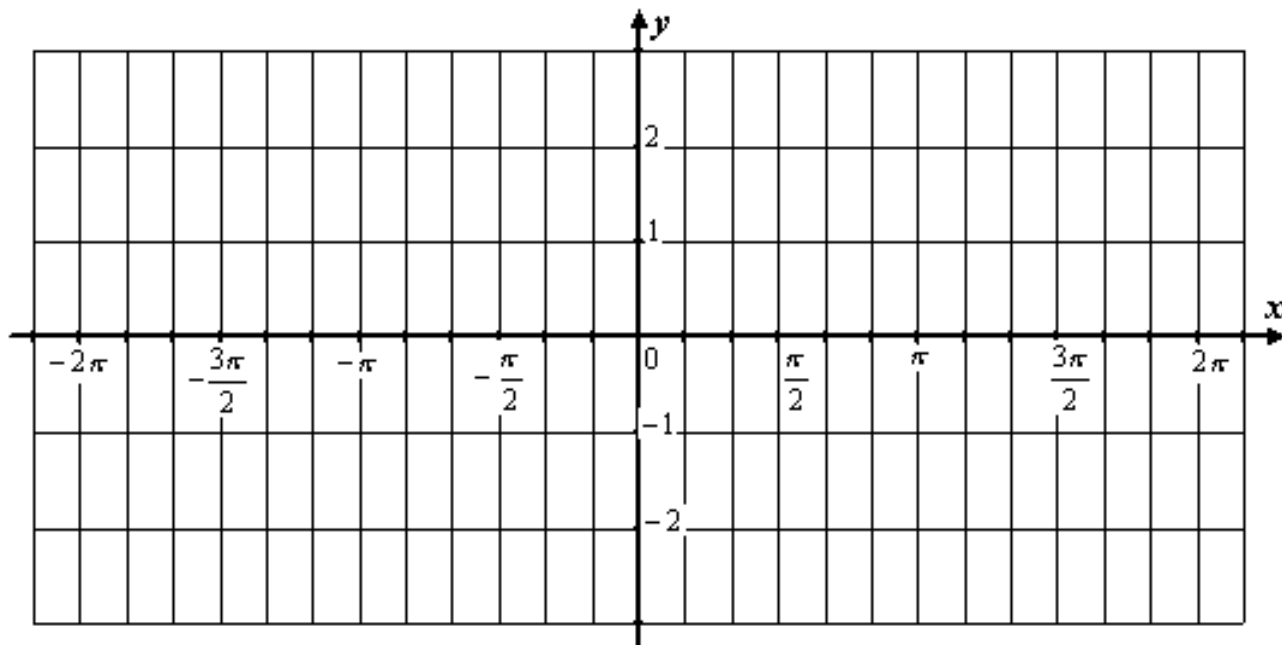
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.



Zadanie 12. (4 pkt)

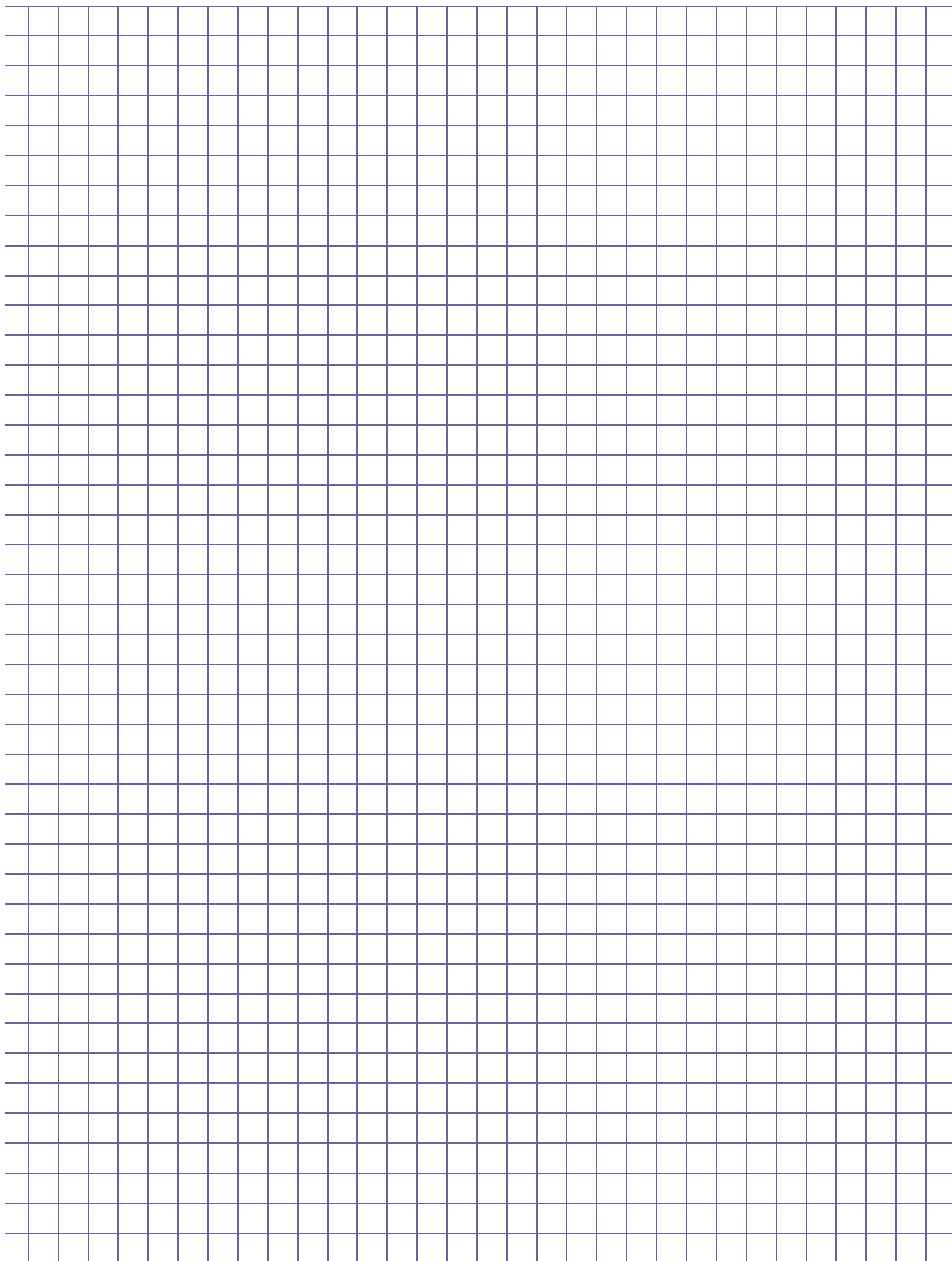
Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Naszkicuj wykres funkcji f .
b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.



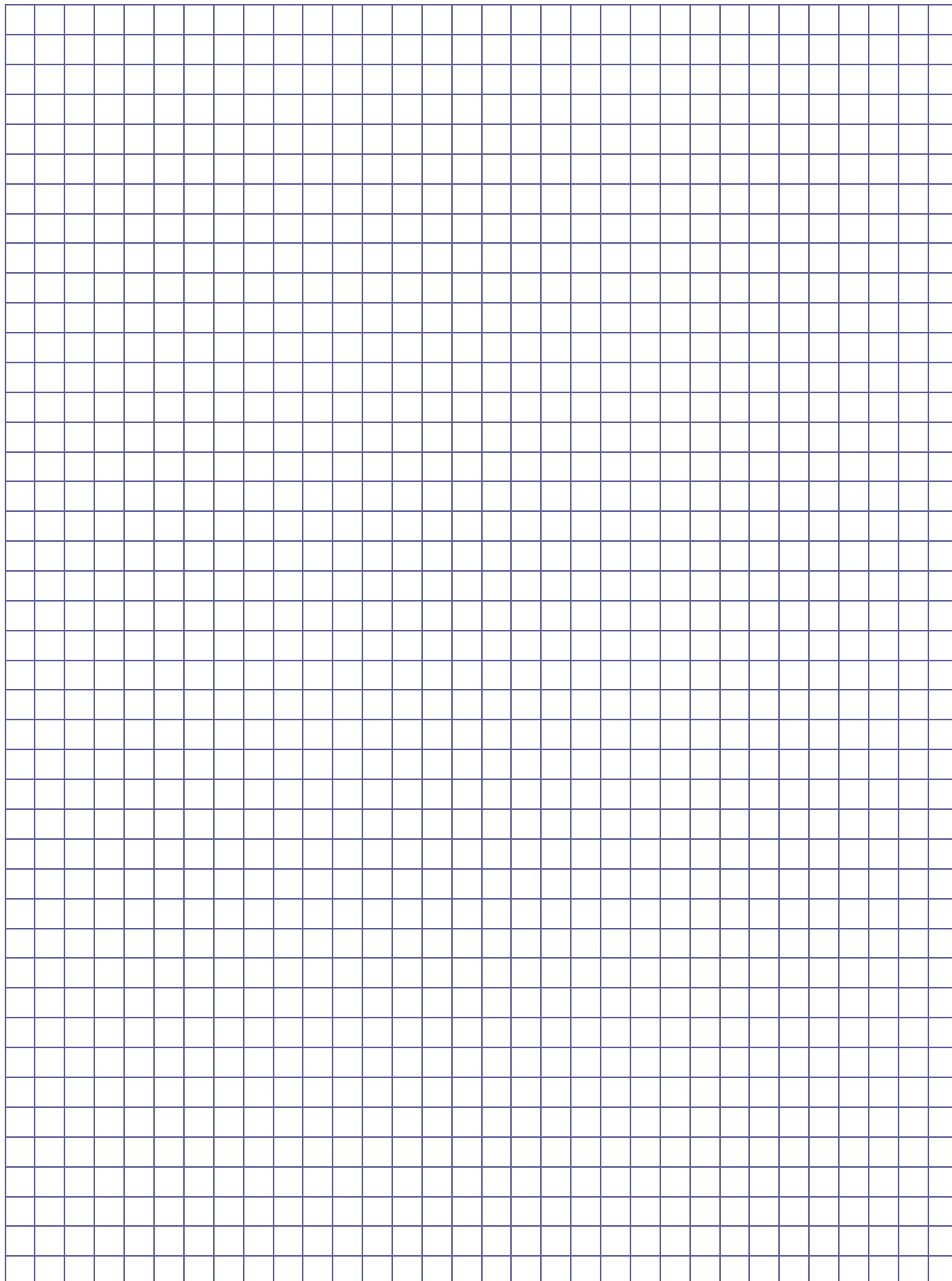
Zadanie 13. (4 pkt)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.



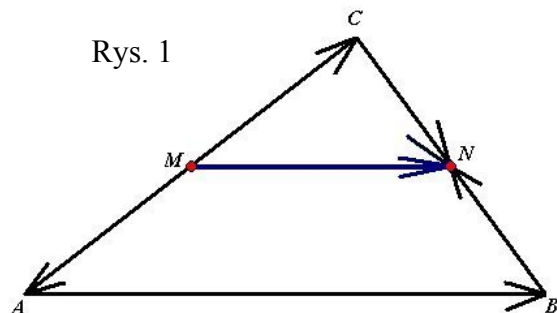
Zadanie 14. (5 pkt)

Oblicz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$.



Zadanie 15. (4 pkt)

W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC (Rys. 1).



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

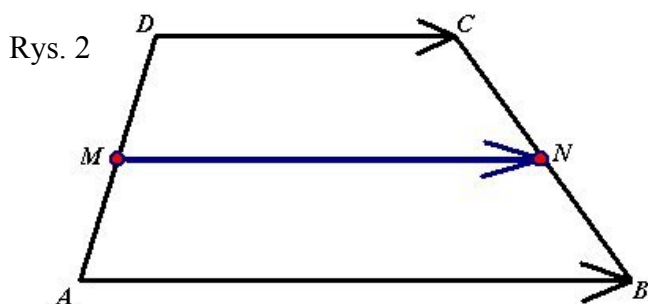
$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

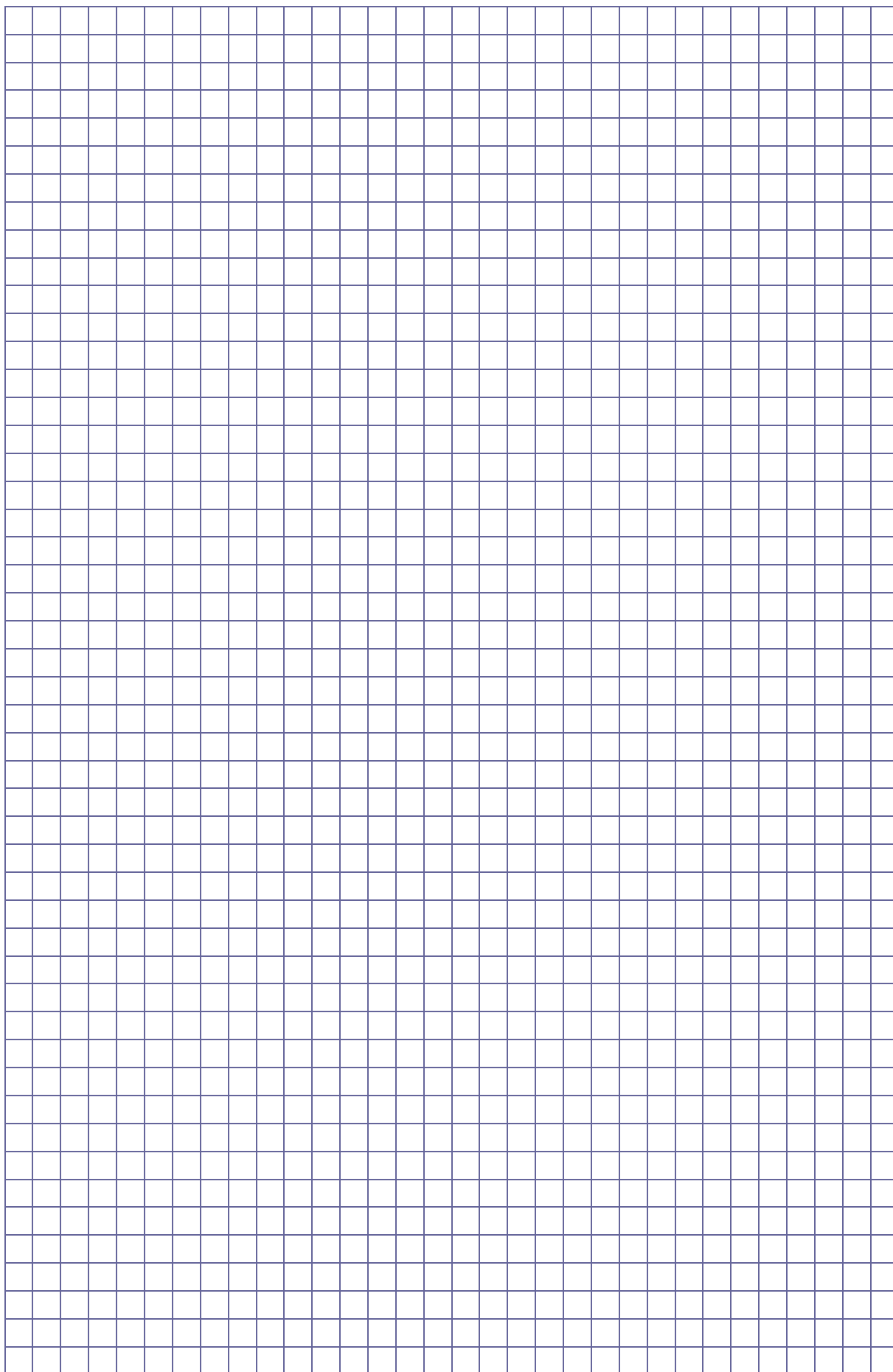
Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu (Rys. 2).



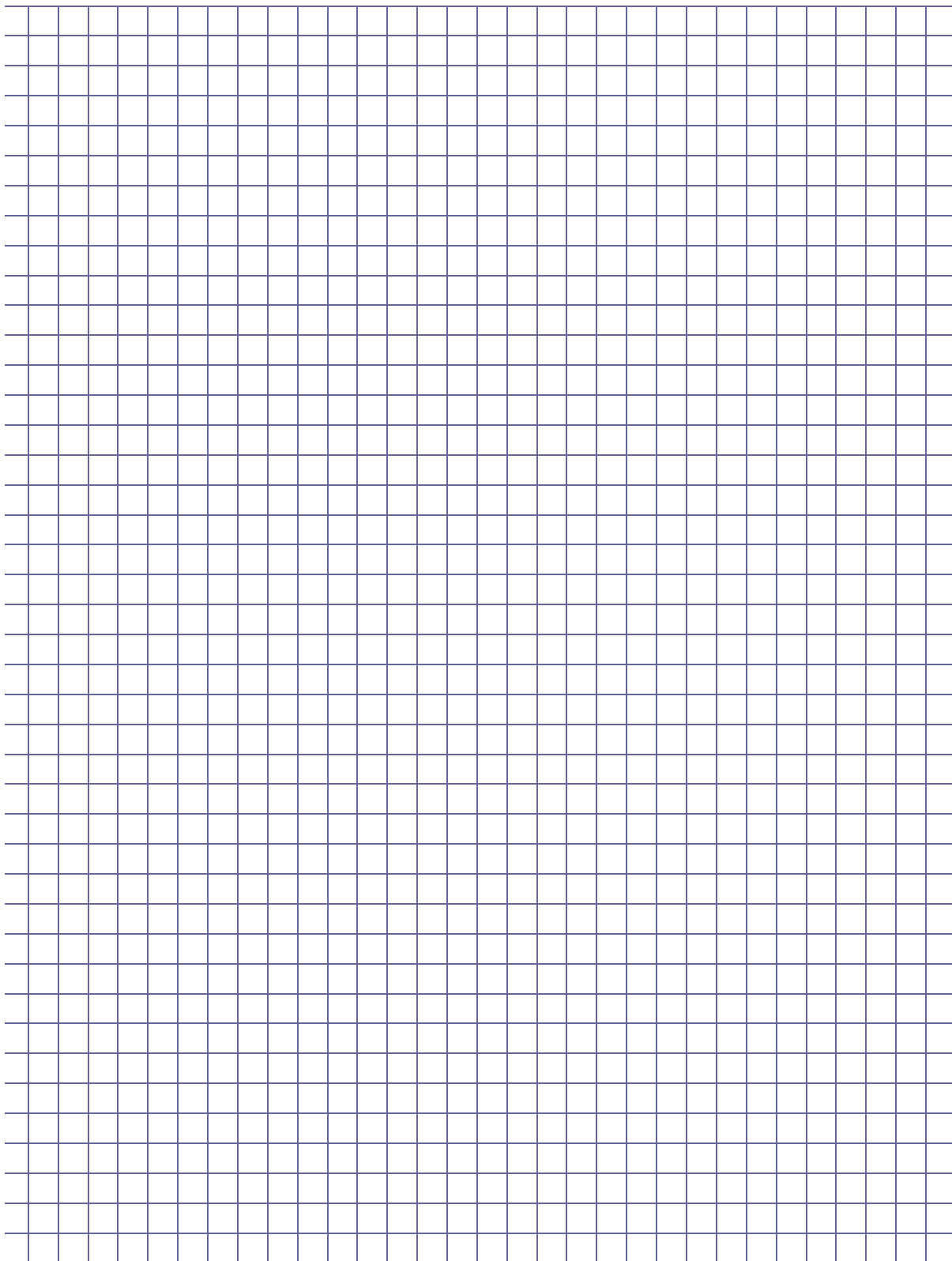
Podaj interpretację otrzymanego wyniku.



Zadanie 16. (5 pkt)

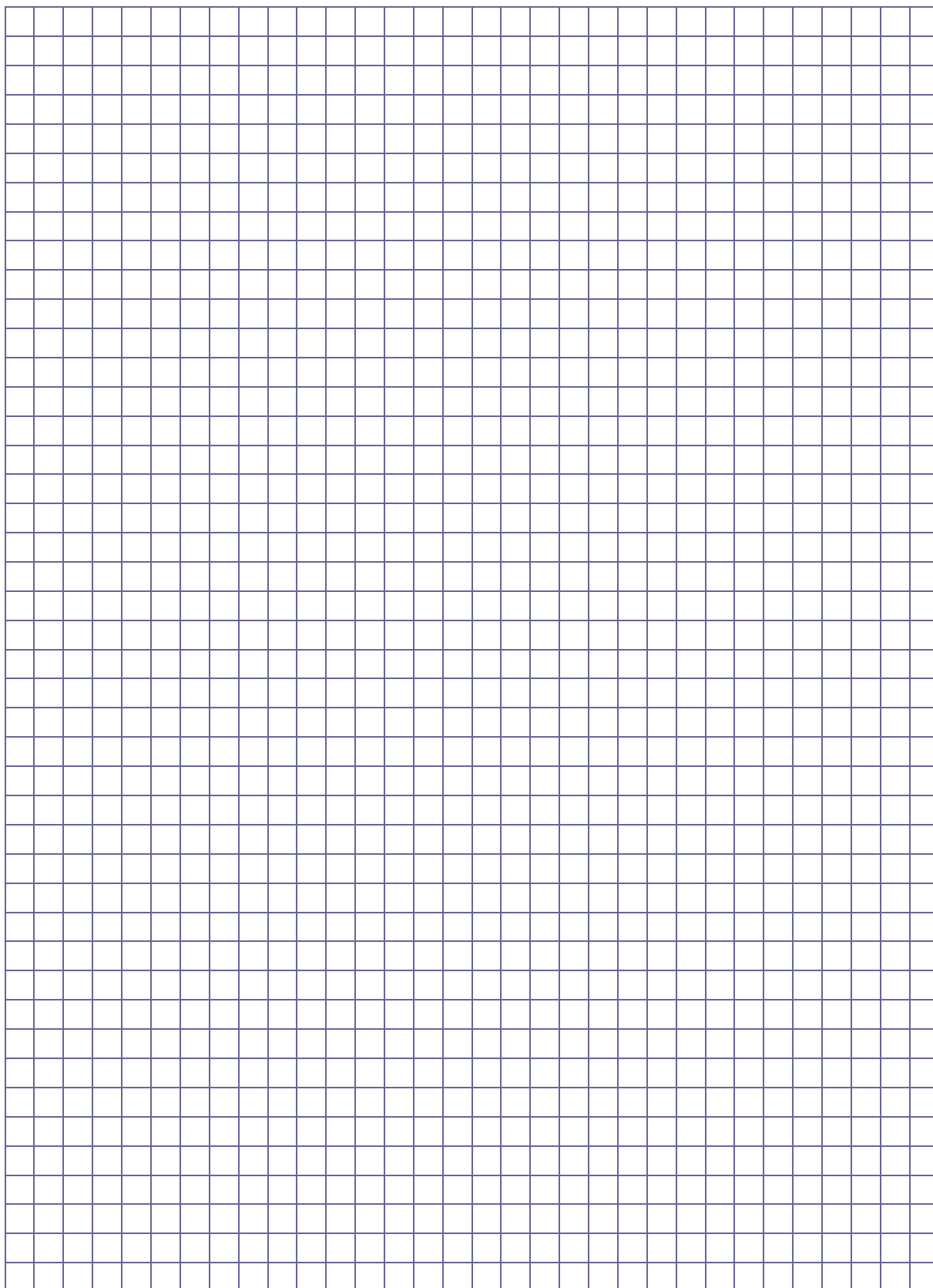
Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Zadanie 17. (7 pkt)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.



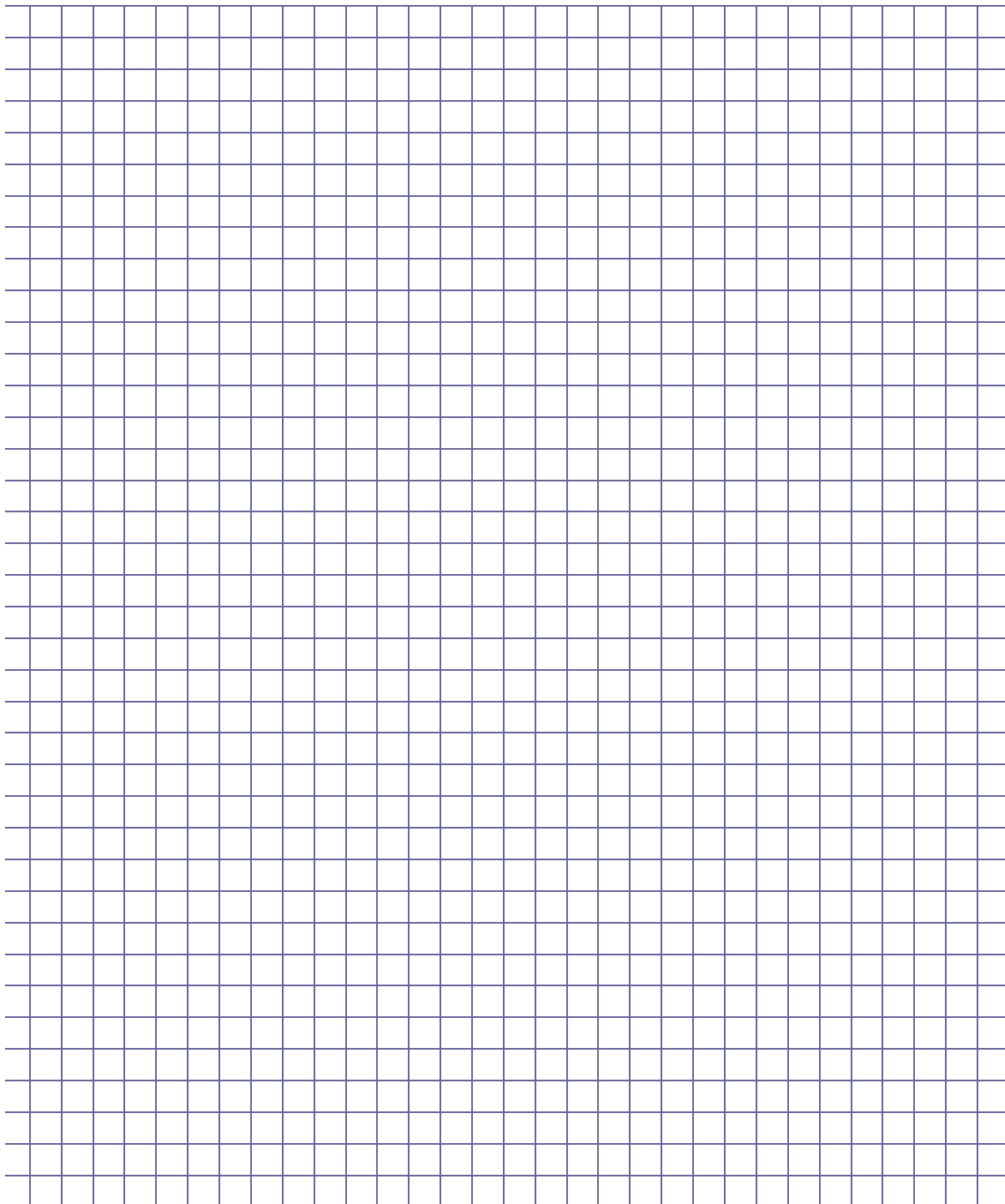
Zadanie 18. (8 pkt)

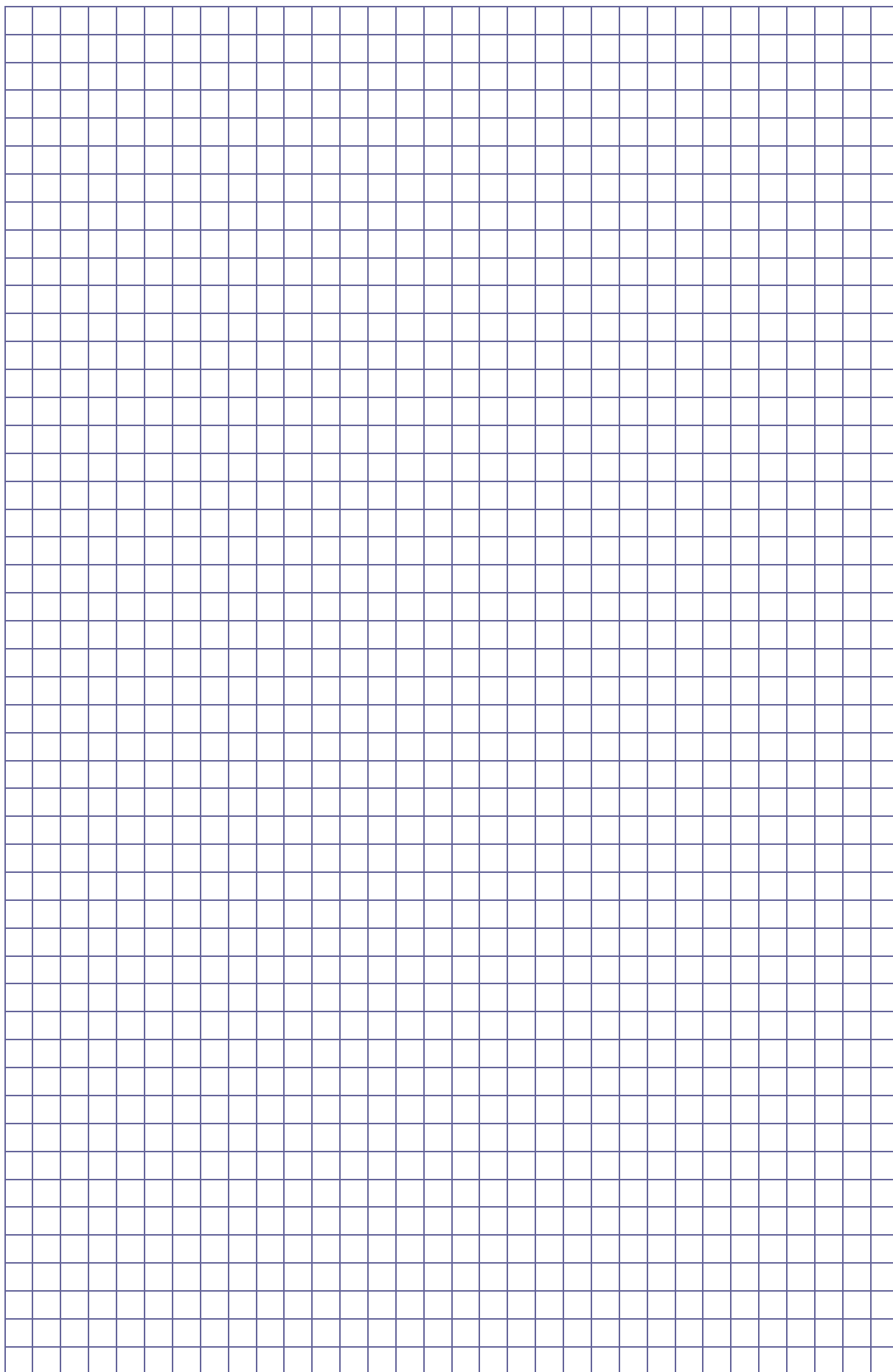
Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

- Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D .
- Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

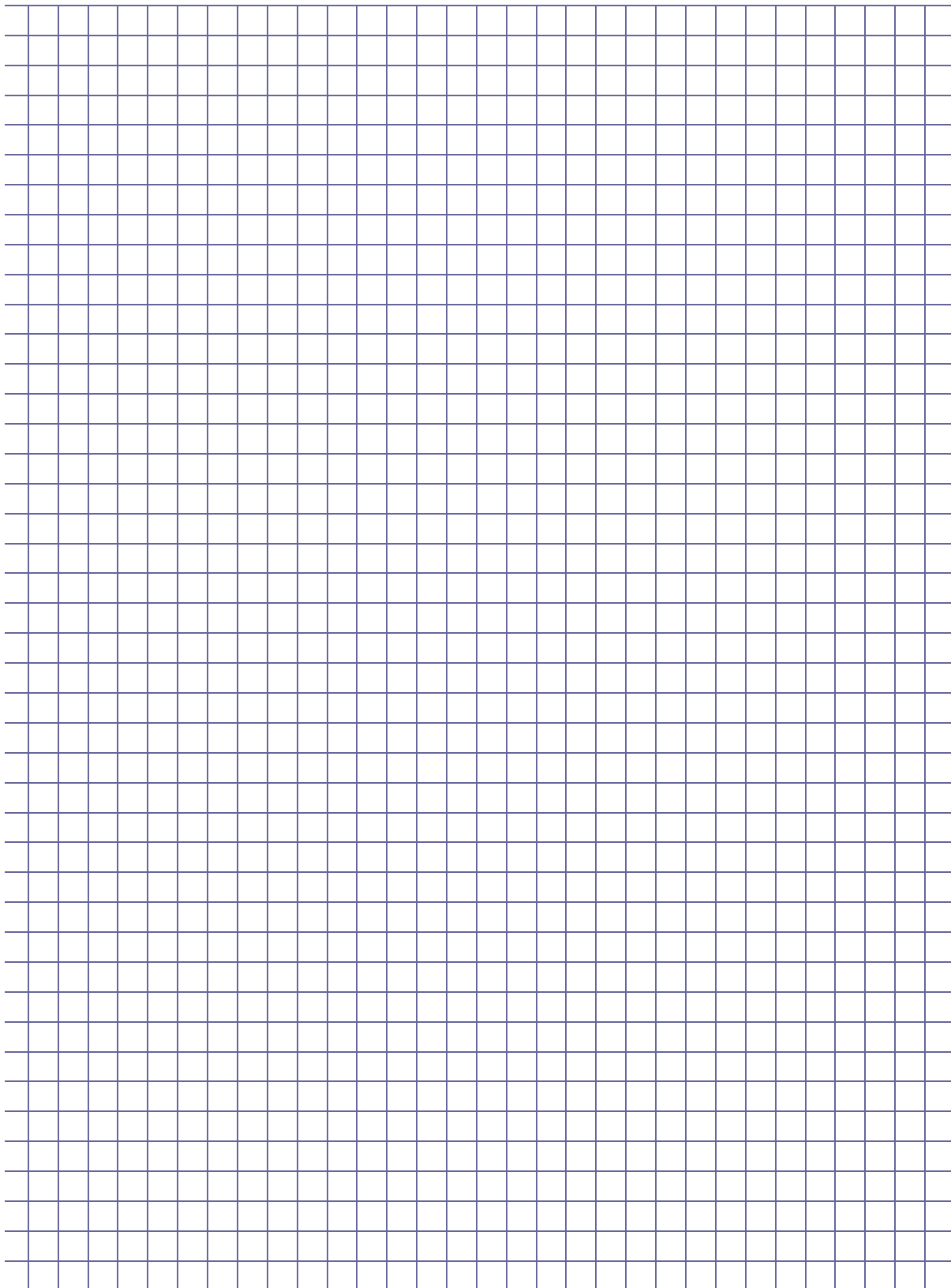


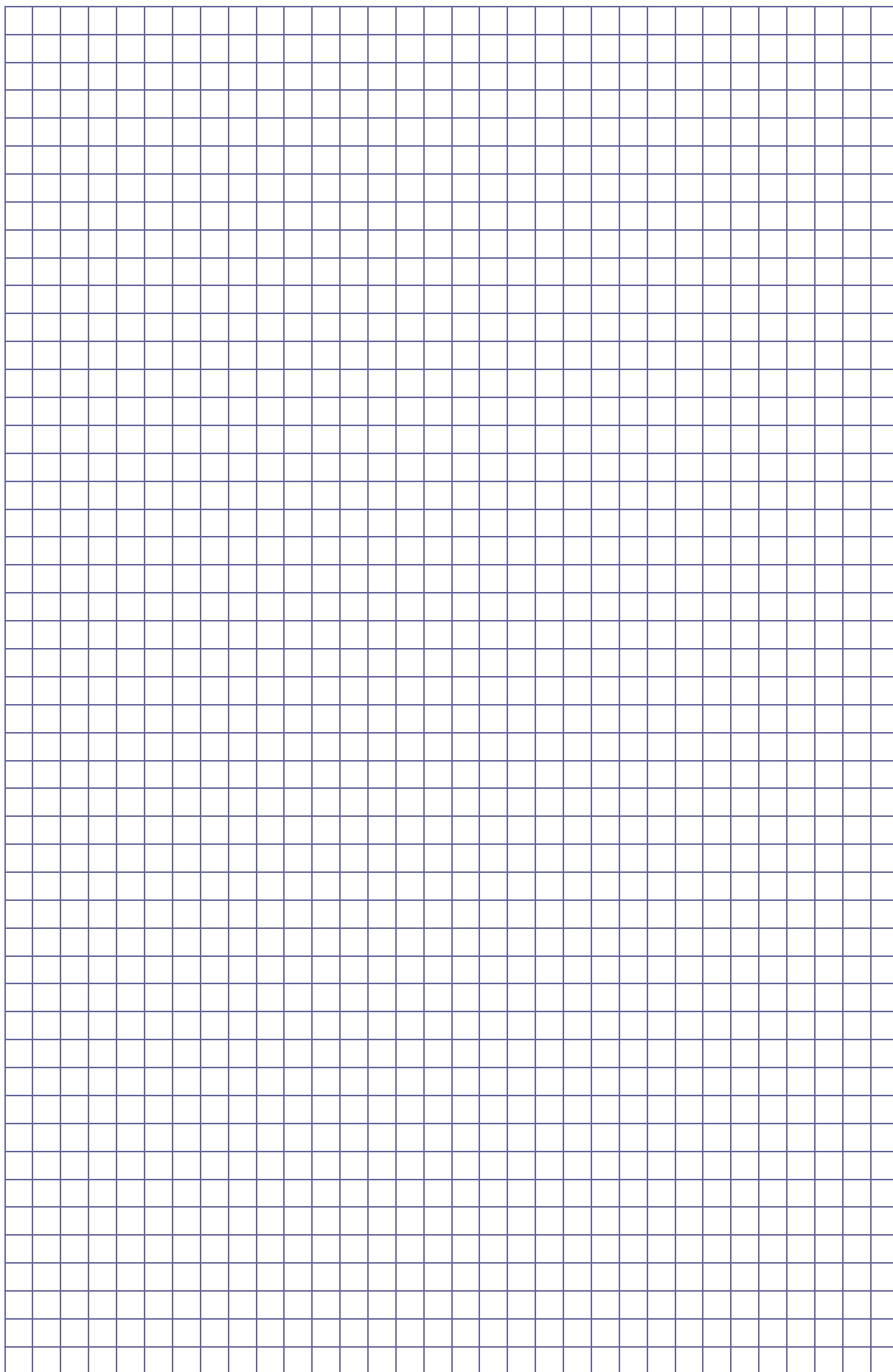


Zadanie 19. (10 pkt)

Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.





BRUDNOPIS

